

MÁRIO SÉRGIO TEIXEIRA DE FREITAS

DINÂMICA NÃO-LINEAR E CAOS EM OSCILADORES LINEARES POR PARTES

Tese apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Doutor em Ciências,
Curso de Pós-Graduação em Física, Setor
de Ciências Exatas, Universidade Federal
do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA

2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA TESE DE DOUTORADO

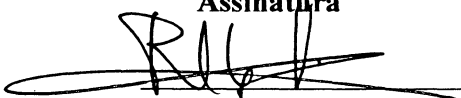
MÁRIO SÉRGIO TEIXEIRA DE FREITAS

TITULO: “Dinâmica Não-Linear e Caos em Osciladores Lineares por Partes”


Em sessão pública iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sob o título acima, e posterior arguição por esta banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato o conceito global A.

Banca Examinadora

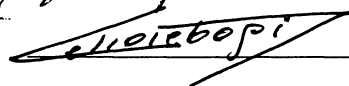
Prof. Dr. RICARDO LUIZ VIANA
(Orientador/Presidente) (UFPR)

Assinatura	Conceito
	A

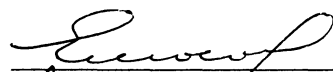
Prof. Dr. MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ
(UFPR)

	A
--	---

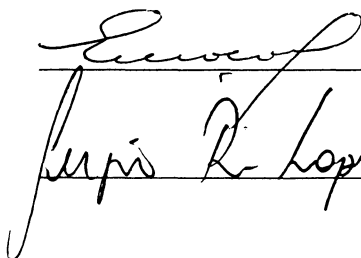
Prof. Dr. CELSO GREBOGI
(USP)

	A
--	---

Prof. Dr. ELBERT E. MACAU
(INPE)

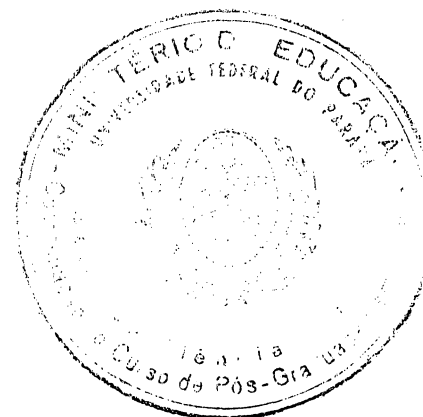
	A
--	---

Prof. Dr. SÉRGIO ROBERTO LOPES
(UFPR)

	A
--	---

Curitiba, 16 de abril de 2003.

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**



PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa Tese de Doutorado do estudante **Mário Sérgio Teixeira de Freitas**, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Tese cujo título é **Dinâmica não-Linear e Caos em Osciladores Lineares por Partes**.

Curitiba, 16 de abril de 2003

Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(Orientador/Presidente) (UFPR)

Prof. MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ
(UFPR)

Prof. CELSO GREBOGI
(USP)

Prof. ELBERT E. MACAU
(INPE)

Prof. SÉRGIO ROBERTO LOPES
(UFPR)



Resumo

Um oscilador linear por partes, carregado, amortecido e forçado é investigado numericamente. A não-linearidade é devida à rigidez assimétrica. A motivação física remete às ondulações de uma ponte pênsil, estimulada pelo fluxo lateral do vento. Um mapa de Poincaré bidimensional é obtido. Os parâmetros são introduzidos gradualmente, favorecendo uma abordagem fenomenológica. Retratos de fase revelam multi-estabilidade com estrutura de bacia muito intrincada, cujo expoente de incerteza resulta não-inteiro, apesar de argumentos geométricos demonstrarem que esta estrutura não é fractal. Um atrator caótico é destruído por uma crise de fronteira. Próximo ao parâmetro crítico, o tempo médio de transiente diminui com o amortecimento segundo uma lei de potência. Ocorre erosão da bacia de segurança quando é introduzido um limiar de ruptura para a mola unilateral. Atratores de períodos mais altos são destruídos pela adição de ruído. Movimento quasiperiódico, sincronização e caos são criados pelo acoplamento entre dois osciladores conectados por uma mola unilateral.

Abstract

A forced damped and preloaded piecewise-linear oscillator is numerically investigated. Nonlinearity is due to asymmetrical stiffness. Physical motivation alludes to the undulations of a suspension bridge, stimulated by transversal wind flow. A two-dimensional Poincaré map is obtained. Parameters are gradually introduced, enhancing a phenomenological approach. Phase portraits reveal multistability with a highly entangled basin structure, which uncertainty exponent is non-integer, despite geometrical arguments demonstrate this structure is not fractal. A chaotic attractor is destroyed through boundary crisis. Close to critical parameter, average transient time decreases with damping as a power-law. Erosion of safe basin occurs as a rupture threshold for the one-sided spring is established. Periodic attractors with higher periods are destroyed by addition of noise. Quasiperiodic motion, synchronization and chaos are created by the coupling between two oscillators connected by a one-sided spring.

Agradecimentos

Os estudos para a elaboração desta tese foram conduzidos com uma contribuição substancial de muita gente no meio acadêmico. É inegável, principalmente por trás do formalismo e da interpretação dos resultados, o trabalho do professor Viana, tanto como orientador quanto como docente. Em eventos dos quais participamos, tivemos acesso a sugestões de valor inestimável por parte do professor Celso Grebogi. Ao longo de todo o curso, o professor Sérgio Lopes ofereceu inúmeros esclarecimentos quanto a aspectos computacionais, topológicos e físicos. E o apoio e a amizade de todo o pessoal do Grupo de Caos foi decisivo para um bom encaminhamento do trabalho. Não é exagero mencionar o acompanhamento, quase passo a passo, pelo colega Jefferson Stafusa Elias Portela, e muitas das ilustrações e comentários incluídos no texto resultaram das nossas extensas discussões.

Devo muito, também, ao professor Carlos Carvalho, pelo admirável suporte à rede do Laboratório de Física Computacional.

E, é claro, dificilmente os objetivos deste trabalho teriam sido devidamente cumpridos sem a gentileza dos colegas do CEFET-Pr, por concederem a dispensa das atividades didáticas para que eu cursasse este doutoramento.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Colocação do modelo dinâmico	11
2.1	Equação do oscilador linear por partes	11
2.1.1	Estrutura real de uma ponte pênsil	11
2.1.2	A ponte como uma placa elástica suspensa por cabos	12
2.1.3	Redução da placa a um oscilador unidimensional	13
2.1.4	Equacionamento: viga elástica e oscilador	15
2.2	Preparação do modelo para a integração numérica	18
2.2.1	Formato das soluções: fluxo e mapa estroboscópico	18
2.2.2	O modelo como sistema de equações diferenciais	18
3	Investigação do modelo dinâmico por simulação numérica	21
3.1	Considerações iniciais	21
3.2	Resultados obtidos com a introdução gradual dos parâmetros	23
3.2.1	Soluções simétricas: <i>oscilador harmônico simples</i>	23
3.2.2	Soluções assimétricas no oscilador <i>linear por partes</i>	25
3.2.3	Coexistência de soluções assimétricas e simétricas no oscilador linear por partes <i>e carregado</i>	26
3.2.4	Quase-periodicidade, caos homoclínico e caos global no oscilador linear por partes, carregado <i>e forçado</i>	28
3.2.5	Coexistência de estados assintóticos no oscilador linear por partes, carregado, forçado <i>e amortecido</i>	35
3.3	Quadro-resumo dos resultados da investigação	41
4	Multiestabilidade: bifurcações, fronteiras de bacia e expoente de incerteza	42
4.1	Intervalos de existência das órbitas estáveis	42
4.2	Geometria das fronteiras de bacia	45
4.2.1	Colocações preliminares	45
4.2.2	Dinâmica na vizinhança do ponto de sela	46
4.2.3	Causa da acumulação das bandas de bacia	48
4.2.4	Expoente de incerteza para a região de acumulação	52
4.2.5	Falsa escala de potência decorrente da acumulação logarítmica	55

5	Comportamento caótico e crise de fronteira	59
5.1	Parâmetros favoráveis à existência de caos	59
5.2	Coexistência de um atrator caótico com um foco estável	61
5.3	Intervalo de existência do atrator caótico no espaço de parâmetros	66
5.3.1	Variação da elasticidade dos tirantes	67
5.3.2	Variação da amplitude da excitação	67
5.3.3	Variação do coeficiente de amortecimento	69
5.4	Crise de fronteira	70
5.4.1	Tangências heteroclínicas	70
5.4.2	Transiente caótico	76
6	Escape, ruído, e acoplamento linear por partes	84
6.1	Potencial modificado para escape	84
6.1.1	Hipóteses simplificadoras	84
6.1.2	Erosão da bacia de segurança	87
6.1.3	Resumo sobre o caso de escape e comentários finais	97
6.2	Adição de ruído	98
6.2.1	Considerações iniciais	98
6.2.2	Modelamento matemático	99
6.2.3	Salto entre bacias (<i>“basin-hopping”</i>)	99
6.2.4	Influência da amplitude do ruído na multiestabilidade	102
6.3	Acoplamento de dois osciladores	105
6.3.1	Motivação física	105
6.3.2	Modelo matemático	106
6.3.3	Mudança de variáveis para a integração numérica	107
6.3.4	Algumas soluções numéricas e possibilidades para explorar o sistema acoplado	108
7	Conclusão	115
A	Variáveis adimensionalizadas	119
B	Parâmetros da equação diferencial em termos dos dados de uma ponte real	121
B.1	Considerações sobre os parâmetros do sistema	121
B.1.1	Elasticidade dos tirantes	121
B.1.2	Carregamento	124
B.1.3	Frequência e amplitude da excitação externa	124
B.1.4	Amortecimento	126
B.2	Levantamento de dados e cálculo das ordens de grandeza	127

Capítulo 1

Introdução

Historicamente, o estudo dos osciladores unidimensionais externamente forçados ocupa um lugar importante na teoria de sistemas dinâmicos não-lineares, por caracterizarem os campos vetoriais mais simples que exibem comportamento caótico e estruturas fractais no espaço de fase, ao lado de sistemas autônomos como o de Lorenz ou o problema de três corpos, entre outros [Strogatz 94] .

Em muitos casos, os parâmetros físicos de um tal sistema (como por exemplo, num oscilador mecânico, a constante elástica da mola ou o coeficiente de amortecimento) não se mantêm constantes ao longo da coordenada espacial, podendo essa variação ser ou não suave. Quando o parâmetro não varia ao longo de *segmentos* da coordenada, mas sofre variações *bruscas* em pontos bem definidos, o sistema é modelado matematicamente por uma equação diferencial *linear por partes*, cuja solução não é, usualmente, acessível por métodos analíticos genéricos, e mostra fortes características não-lineares [Kim e Noah 91], [Shaw e Holmes 83].

No oscilador escolhido como exemplo-base para esta tese de doutoramento, a constante elástica da mola sofre uma única descontinuidade ao longo da coordenada espacial. Por uma série de simplificações, é mostrado que uma possível motivação física para este modelo é o problema do movimento ondulatório de uma ponte pênsil estimulada pelo fluxo lateral do vento: os tirantes que conectam o cabo principal ao tabuleiro, sendo cabos de aço, funcionam como *molas unilaterais*, sendo assim responsáveis pela linearidade por partes do sistema dinâmico [Doole e Hogan 96], [Lazer e McKenna 90].

Os objetivos da tese podem ser resumidos em colocar o modelo mecânico, formular sua equação diferencial e estabelecer a metodologia para a investigação numérica; a partir dos resultados, caracterizar as órbitas, como também a sua mudança conforme um dado parâmetro é variado; conseguir um panorama dinâmico do sistema, associando-o com a estrutura geométrica do espaço de fase; levantamentos estatísticos devem fornecer escalas de potência que concordem com leis universais encontradas na bibliografia. Alguns passos dessa pesquisa são conduzidos algebricamente; contudo, o trabalho envolve intensivamente a simulação por métodos numéricos. Um confronto futuro com resultados experimentais pode ser extremamente interessante, mas por ora foge ao plano geral desta tese.

Do ponto de vista matemático, os recursos computacionais têm sido progressivamente explorados nas últimas décadas na integração de equações diferenciais não-lineares, favore-

cendo inclusive a formulação de novos teoremas; do ponto de vista físico, já proporcionaram evidências para leis universais, ao revelar comportamentos similares em sistemas com diferentes graus de complexidade [Alligood *et al.* 96] , [Strogatz 94] .

Neste trabalho predomina a abordagem geométrica, com farto uso de ilustrações, tanto esquemáticas como de saída gráfica das soluções obtidas numericamente. Por ser um sistema de baixa dimensionalidade (e além disso, mecânico), a interpretação física dessas soluções fica favorecida. Sempre que possível, optou-se por explorar os resultados sob esse ponto de vista, contribuindo assim para um texto mais atraente, e também para o desenvolvimento de uma sensibilidade intuitiva quanto aos fenômenos associados às propriedades das soluções dos sistemas dinâmicos em geral. Em algumas passagens em que se julgou procedente, são feitas extrapolações para o exemplo da ponte pênsil. Um tratamento analítico, apresentado paralelamente à investigação numérica, foi conduzido apenas para os casos em que o amortecimento é negligenciado. Soluções do sistema amortecido também são passíveis de serem obtidas por técnicas perturbativas [Cao *et al.* 01], o que possibilitaria a caracterização do início dos regimes transientes; contudo, visto que o interesse neste trabalho se concentra nos estados assintóticos do sistema, os casos amortecidos foram investigados apenas por métodos numéricos.

Diversas publicações serviram como fonte de consulta, além dos livros básicos de Dinâmica Não-linear. Algumas tiveram aplicação em tópicos muito específicos; outras se referem a temas recorrentes no trabalho, e estas podem ser divididas em dois grupos principais. No primeiro, estão aquelas que tratam de diversos tipos de osciladores lineares por partes, explorando propriedades, semelhantes ou não, às ao modelo aqui estudado. O segundo grupo trata de outros sistemas dinâmicos não-lineares que apresentam padrões de comportamento qualitativamente equivalentes aos revelados aqui pela simulação numérica, notadamente, a obstrução à previsibilidade devida à geometria intrincada das fronteiras de bacia, e a transição para o caos por crise de fronteira. Nos parágrafos que seguem, é exposta uma descrição, muito resumida, de algumas dessas referências, contextualizando esta tese na produção científica correlacionada aos temas nela abordados.

O estudo de sistemas com descontinuidades tem sido dirigido para osciladores impacantes que modelam sistemas mecânicos com folgas [Wiercigroch e Sin 98] ou com barreiras [Kim e Noah 91], engrenagens [Souza e Caldas 01], e também máquinas rotativas, perfuratrizes, impressoras e até veículos sobre trilhos [Jerrelind e Stensson 00], [Pascal 95], assim como para vibrações do tipo salto e deslize ("*stick-slip*") [Popp e Stelter 90]; por outro lado, circuitos também podem apresentar características lineares por partes, por exemplo, um conversor eletrônico [Banerjee *et al.* 00] ou o circuito com um diodo não-linear [Matsumoto *et al.* 85]. A bibliografia inclui também abordagens mais abrangentes, que tratam de bifurcações de Hopf [Luo e Xie 02], passando por formas normais para bifurcação rasante [di Bernardo *et al.* 00], multiestabilidade [Whiston 87b] e aparecimento de caos por duplicação de períodos [Thompson e Ghaffari 83]. Um fenômeno interessante em mapas suaves por partes é a chamada bifurcação por "colisão de borda" (*border-collision*), que corresponde no espaço de fase a uma órbita que cruza a coordenada na qual a derivada do mapa é descontínua [Banerjee e Grebogi 99], [Nusse *et al.* 94]. Fundamental para este estudo é também o trabalho original sobre o oscilador bilinear [Shaw e Holmes 83].

Em particular, sobre as ondulações de uma ponte pênsil, dispõe-se de trabalhos que discutem diferentes teorias a respeito do desastre da ponte de Tacoma, em 1940 [Koughan 96], [Billah e Scanlan 91], os quais contestam a explicação apresentada na bibliografia de física básica, que menciona aquele fenômeno histórico como um exemplo de ressonância linear [Halliday e Resnick 91] (p.23, p.35). O modelo seguido nesta tese assume o tabuleiro da ponte como uma viga apoiada nas duas extremidades e suspensa por tirantes, simplificando-o, por alguns passos, na forma de um oscilador unidimensional [Doole e Hogan 96], [Lazer e McKenna 90]. O estudo da ponte pênsil (ou de uma viga apoiada) como um sistema espaço-temporal revela a existência de fenômenos como ondas progressivas [Bardin e Furta 98], [McKenna e Walter 90], ondas solitárias [Champneys e McKenna 97] e, ainda, ondas torcionais [Doole e Hogan 00].

A obstrução à previsibilidade, devida à geometria das fronteiras de bacia, já foi estudada em diversos sistemas físicos, tanto contínuos como discretos, e inclusive em sistemas puramente matemáticos, como por exemplo a convergência de um método de Newton amortecido para as soluções de $z^3 - 1 = 0$ no plano complexo [Epureanu e Greenside 98]. Os principais trabalhos consultados investigam, em termos bastante genéricos, sistemas como o rotor duplo com ruído [Feudel *et al.* 98], ou um sistema equivalente sem ruído, tratando do expoente de incerteza [Grebogi *et al.* 87a], e também o rotor simples [Feudel *et al.* 96], focando o interesse nos intervalos de existência das órbitas no espaço de parâmetros, ou ainda em sistemas com não-linearidades quadráticas e cúbicas [Zavodney *et al.* 90]; outros associam a formação das fronteiras a bifurcações tipo nó-sela, explorando a propriedade de Wada [Nusse e Yorke 96a], [Nusse *et al.* 95]. Além disso, já foram pesquisadas as diversas propriedades das fronteiras em diferentes regiões do espaço de fase, tais como a dimensão fractal, que pode assumir valores inteiros ou fracionários, sendo o número desses valores finito [Grebogi *et al.* 87a], [Grebogi *et al.* 87d]; a alteração da estrutura geométrica pode estar associada à transição para o caos via intermitência [Park *et al.* 89] ou via crise [McDonald *et al.* 85b]; têm também especial interesse as alterações suaves ou abruptas (chamadas então *metamorfoses*) no valor da dimensão da fronteira, conforme um parâmetro é variado [Santee e Gonçalves 99], [Park *et al.* 92], [Grebogi *et al.* 86]; particularmente, para o modelo de uma viga flutuante, aplicável às oscilações laterais de um navio, as condições iniciais seguras com respeito ao tombamento constituem uma bacia que sofre *erosão* com a alteração dos parâmetros [Senjanovic e Fan 95], [Thompson *et al.* 90]. A fundamentação teórica pode ser ampliada tanto com base em trabalhos de extremo rigor formal [Grebogi *et al.* 88b] como em artigos de revisão [Nusse e Yorke 96b], [Grebogi *et al.* 87b], e ainda em uma extensa e elucidativa classificação dos tipos de fronteira por critérios geométricos [McDonald *et al.* 85a]. A adição de ruído em sistemas multiestáveis cria o cenário para o chamado *controle de complexidade*, que permite manter por um tempo arbitrariamente longo a permanência da órbita nas proximidades de um estado periódico, e também abreviar a duração dos transientes caóticos entre estes estados [Macau e Grebogi 99], [Feudel e Grebogi 97]. Nesse aspecto, tal técnica se distingue do controle de caos por estabilização de órbitas periódicas instáveis, conhecido como *método O.G.Y.* [Grebogi e Lai 97], [Shinbrot *et al.* 93].

Quanto ao fenômeno de crise de fronteira, também é verificado em sistemas dinâmicos os mais diversificados, como sistemas de potência elétrica [Marcos *et al.* 03], mecanismos com engrenagens [Souza e Caldas 01], circuito de Chua [Alligood *et al.* 96] (p.421), um trabalho experimental sobre gotas pingando de uma torneira [Sartorelli *et al.* 94] ou o problema de um navio sob impacto de ondas oceânicas [Thompson *et al.* 90]. Dispõe-se também de estudos sobre diferentes tipos de transiente caótico [Grebogi *et al.* 85] e as primeiras publicações sobre crise [Grebogi *et al.* 83], [Grebogi *et al.* 82].

Fontes mais específicas foram consultadas, para os tópicos que tratam das possibilidades para continuidade desse trabalho, assim como para o apêndice que levanta os parâmetros de uma ponte pênsil real. Por sua grande diversidade, são mencionadas oportunamente no próprio corpo do texto.

Na ocasião do processamento numérico realizado nesta tese, o Laboratório de Física Computacional da UFPR permite acesso a um grande número de servidoras de CPU, tanto de arquitetura Intel como Alpha, tendo velocidades de processamento numérico de até 1400MHz e memórias RAM disponíveis da ordem de 0,5GB. Além do espaço em disco rígido para os *softwares*, o usuário dispõe de 800MB para armazenagem de arquivos individuais (ou mais, se necessário). Os programas específicos para a simulação numérica foram escritos em linguagem FORTRAN. Alguns deles, como o de bacias de atração e o de diagramas de bifurcações, consumiram para seu processamento um tempo computacional da ordem de dias. Outros, especialmente o de expoente de incerteza e o de durações dos transientes caóticos, chegaram a demorar algumas semanas. Para a integração numérica, foi usada a subrotina LSODA, baseada num método de Adams de 12ª ordem [Hindmarsh 83]. A apresentação gráfica dos resultados foi feita mediante o programa XMGRACE. Esporadicamente, como para a pesquisa de órbitas instáveis e para o traçado das variedades a elas associadas, foi adotado um procedimento alternativo, lançando-se mão diretamente do programa DYNAMICS II [Nusse e Yorke 97]. Quanto às figuras esquemáticas, foram todas elaboradas especialmente para esta tese, com uso do programa XFIG.

Conceitos fundamentais da área, quando julgados necessários, foram inseridos resumidamente no corpo do texto, eventualmente com ilustrações para esclarecer aspectos geométricos. Também são mencionados desta forma alguns procedimentos concernentes à metodologia adotada, incluindo a descrição de algumas dificuldades técnicas enfrentadas ao configurar dados de entrada e saída dos programas computacionais.

Um aspecto interessante do sistema estudado é este se ter mostrado especialmente favorável a uma calibração sistemática dos parâmetros, sendo verificada a cada passo a complexidade cumulativa dos resultados. Assim, tanto a simulação numérica, como o acompanhamento analítico e a interpretação da geometria do espaço de fase em termos de fenômeno, partem do caso bastante conhecido de um oscilador harmônico simples, sendo então gradualmente aumentados os parâmetros de não-linearidade, do carregamento, da excitação externa e finalmente do amortecimento viscoso. Esta metodologia pode ser útil para uma melhor compreensão de sistemas de maior dimensionalidade a serem estudados futuramente.

Até o presente momento, alguns resultados desta tese possibilitaram a preparação de dois artigos, um já submetido e aguardando a resposta [Freitas *et al.* 03], e outro já aceito

e aguardando a publicação[Freitas *et al.* 04].

O capítulo (2) desta tese coloca o problema do oscilador linear por partes amortecido e forçado, desenvolvendo seu equacionamento e mostrando como este modela as ondulações da ponte pênsil. No capítulo (3), é proposta uma metodologia a ser adotada para conduzir a simulação numérica, sempre que possível com apoio em um desenvolvimento analítico, e também procurando uma interpretação física; é ainda apresentado um panorama dinâmico do sistema. No capítulo (4) é explorado um dos principais aspectos revelados no capítulo (3), que é a multiestabilidade, em termos de intervalos de existência de soluções estáveis e expoente de incerteza referente a fronteiras entre bacias de atração. No capítulo (5) é explorado um aspecto diverso do sistema, que envolve um atrator caótico, a estrutura das variedades no espaço de fase e a destruição desse atrator por crise de fronteira, com análise estatística dos transientes caóticos. O capítulo (6) agrupa três diferentes tópicos, que consistem em investigações de novas possibilidades para dar continuidade a este trabalho: a modificação do potencial efetivo para incluir o escape, os efeitos no espaço de fase causados pela adição de um pequeno ruído aleatório, e o aumento da dimensionalidade do sistema considerando o acoplamento de dois osciladores por uma mola unilateral. As conclusões gerais da tese são apresentadas no capítulo (7). O apêndice (A) mostra detalhadamente os passos para a adimensionalização das variáveis, envolvida para escrever a equação diferencial no capítulo (2). O apêndice (B) procura aplicar o modelo estudado a um caso mais realístico: é feita uma pesquisa (despretenciosa) sobre quais seriam as ordens de grandeza dos parâmetros da equação diferencial para uma ponte pênsil típica, apresentando alguns resultados numéricos e comparando com os obtidos para o oscilador linear por partes.

Capítulo 2

Colocação do modelo dinâmico

2.1 Equação do oscilador linear por partes

2.1.1 Estrutura real de uma ponte pênsil

O sistema dinâmico tratado neste trabalho é um oscilador unidimensional, cuja resposta elástica é *linear por partes*, ou seja, o oscilador é esquematizado por uma massa conectada a uma mola cuja força restauradora é proporcional ao deslocamento, mas envolve uma descontinuidade no valor da constante elástica ao longo da coordenada. Esse corpo é excitado por uma força externa que varia senoidalmente no tempo, e está também sujeito a uma força de atrito viscoso. Além disso, a presença do campo gravitacional tem um efeito importante, quando este é combinado com a linearidade por partes.

Uma das motivações físicas para este sistema se refere às ondulações do tabuleiro de uma *ponte pênsil*, estimuladas pelo fluxo lateral do vento [Doole e Hogan 96], [Lazer e McKenna 90]. O equacionamento do *modelo* mecânico para esse oscilador envolve uma série de simplificações, e é interessante que as características mais básicas da ponte sejam preservadas nesse processo. Isso justifica uma abordagem sobre os diferentes componentes de uma ponte pênsil típica em uma *situação real*, e sobre como as simplificações adotadas levam ao oscilador unidimensional.

Em última instância, o esquema estrutural em uma obra de engenharia é projetado para que esta, quando solicitada por esforços mecânicos, descarregue-os com segurança no subsolo. No caso da ponte pênsil, o peso dos veículos provoca esforços sobre a pista de rolamento, assentada sobre um *tabuleiro* (placa horizontal constituída por uma longa treliça de aço). O tabuleiro transmite essas tensões, juntamente com as causadas pelo seu próprio peso, para os outros elementos da estrutura: em cada uma das duas extremidades, junto às margens, encontra-se um *apoio fixo* sobre um *encontro* (constituído por um bloco massivo de concreto); e conectados às *bordas laterais* do tabuleiro, encontram-se os *tirantes* (cabos constituídos por fios de aço trefilados). A figura 2.1 ilustra os componentes dessa estrutura.

Assim, como resultado da aplicação de cargas móveis (peso dos veículos) e permanentes (peso próprio), as quais solicitam o tabuleiro no sentido de cima para baixo, os tirantes são tracionados, retransmitindo os esforços para o *cabo principal*. Este, de sua parte, os

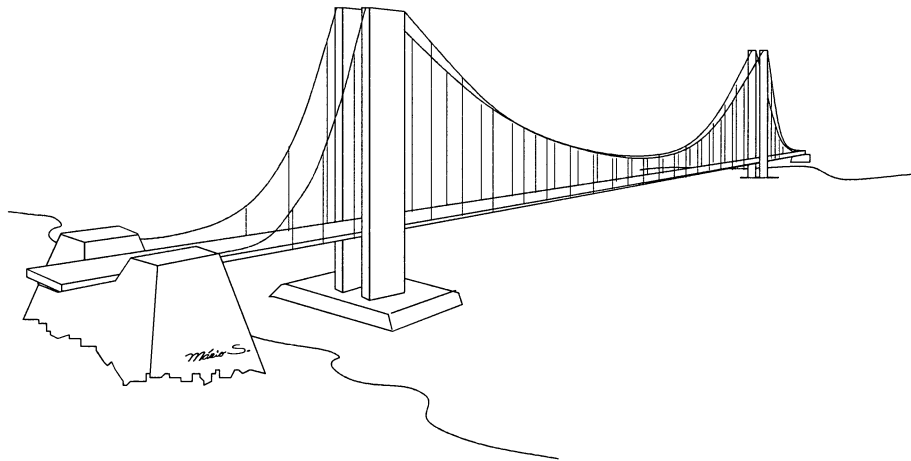


Figura 2.1: *Estrutura típica de uma ponte pênsil. As cargas são recebidas por um tabuleiro; uma parte dos esforços é transferida para os encontros junto às margens; e a parte restante é transmitida, sucessivamente, para os seguintes componentes: o conjunto de cabos verticais chamados de tirantes, os dois cabos principais recurvados, as altas torres, e a infraestrutura. Numa ponte real, todos esses elementos são deformáveis.*

conduz para o topo das *torres* na forma de compressão (as torres consistem em duas extensas estruturas de aço ou de concreto armado, instaladas nas extremidades do *vão central*). Por sua vez, essas torres transferem os esforços para a *infraestrutura* (fundação), que os descarrega no solo de fundo; junto a cada margem, o encontro recebe os esforços transmitidos verticalmente pelos *vãos laterais* do tabuleiro na forma de compressão, descarregando-os para o terrapleno. As extremidades laterais do cabo principal são geralmente ancoradas nesses encontros (chamados então *blocos de ancoragem*). Em projetos de engenharia, a opção por pontes pênsis se justifica, além do apelo estético do conjunto, por estas admitirem um vão central que pode se estender por várias centenas de metros de comprimento [O'Connor 76] (p.336), mesmo se nessa região o fundo mostrar condições desfavoráveis ao assentamento de pilares sobre sapatas. E por serem especialmente suscetíveis a ondulações causadas pelo fluxo do vento, oferecem um atraente exemplo de aplicação para a dinâmica de osciladores não-lineares.

2.1.2 A ponte como uma placa elástica suspensa por cabos

Como uma *idealização* da estrutura da ponte, foi escolhido um modelo já adotado na literatura [Doole e Hogan 96], no qual só se considera a elasticidade do tabuleiro e a dos tirantes. Isso significa que é totalmente negligenciada a deformabilidade do cabo principal, assim como a dos blocos de ancoragem, das torres e do solo. A representação esquemática está na figura 2.2.

O aspecto mais relevante aqui é o tratamento dos tirantes como *molas unilaterais*. Como é constituído por cabos, um tirante, durante o movimento de ondulação, *não exerce* força restauradora sobre o tabuleiro nos instantes em que este se encontra *acima* da posição correspondente à deflexão nula. A curva de resposta elástica é, portanto, composta

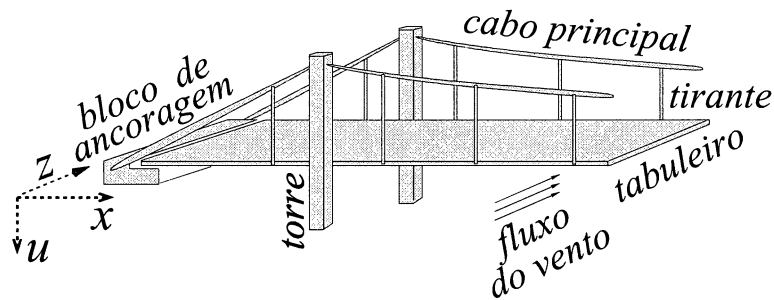


Figura 2.2: *Modelo de ponte pênsil: O tabuleiro é considerado como uma placa elástica, apoiada nas duas extremidades e sustentada por tirantes, que se comportam como molas unilaterais; a deformabilidade dos demais componentes estruturais é negligenciada; tem-se a dissipação de energia devida ao amortecimento viscoso, e a excitação externa devida a forças periódicas induzidas pelo fluxo lateral do vento (em benefício da clareza, a deflexão estática devida ao carregamento não foi representada neste esboço).*

por duas funções lineares conectadas em um ponto, ou seja, é *linear por partes*. O outro termo responsável pela elasticidade se refere ao próprio *corpo do tabuleiro*, que responde linearmente, sem descontinuidades, tanto nas deflexões para baixo quanto para cima, como uma *placa elástica*. A força efetiva envolve ainda o *carregamento*, que engloba as forças verticais devidas ao peso próprio e ao dos veículos, consideradas aqui como invariáveis no tempo (cargas estáticas); contrastando com um problema linear, este termo não pode ser eliminado por meio de uma simples translação [Doole e Hogan 96]: em torno da posição de equilíbrio estático, oscilações de pequena amplitude ficam restritas ao regime linear, o que contribui para sua estabilidade. Mas essencialmente, o que confere ao sistema seu comportamento não-linear é a presença dos tirantes. As contribuições das diferentes parcelas da curva de resposta efetiva é mostrada na figura 2.3.

A dissipação de energia é representada, nesse modelo, pelo amortecimento viscoso causado pelo ar, no qual a força de atrito é diretamente proporcional à velocidade vertical instantânea. A excitação externa, provocada pela ação do fluxo do vento, é dada pela componente vertical de uma força que varia periodicamente com o tempo. Aqui esta força está sendo atribuída à interação do tabuleiro com uma *esteira de vórtices* de Von Kármán [Shames 82] (p.412), [O'Connor 76] (p.392). No caso, a variação no tempo é descrita simplifadamente, por um único termo senoidal.

2.1.3 Redução da placa a um oscilador unidimensional

Nesta subseção, é mostrado que o oscilador linear por partes a ser investigado admite como aplicação o exemplo da ponte pênsil, desde que este seja devidamente simplificado.

Encaminhando portanto essa simplificação, o tabuleiro ondulante da ponte pênsil é considerado, de início, como uma *placa bidimensional* que apresenta deflexões transversais, periódicas no tempo e no espaço. Tomando um sistema de referência como o esquematizado na figura 2.4, o movimento é modelado por uma função na forma $u = u(x, z, t)$, sendo u a deflexão vertical (o sentido de cima para baixo é tomado como positivo), t a coorde-

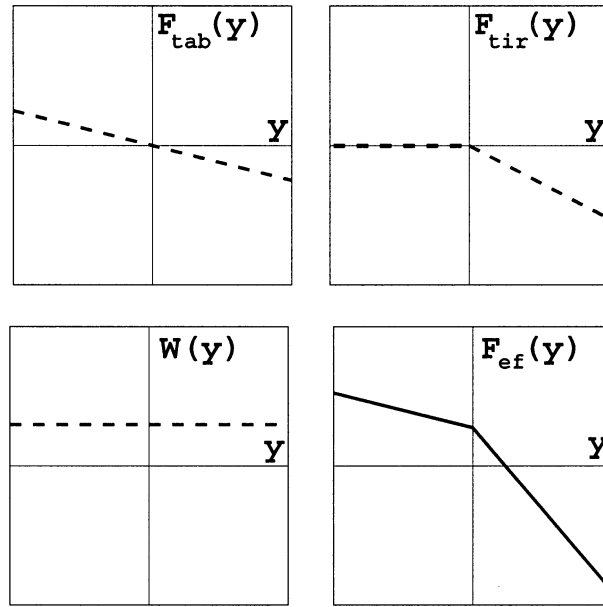


Figura 2.3: Contribuições devidas à elasticidade da viga $F_{\text{tab}}(y)$, à elasticidade dos tirantes $F_{\text{tir}}(y)$ e ao carregamento $W(y)$ na curva de resposta efetiva $F_{\text{ef}}(y)$ da ponte pênsil para deflexões verticais ($y > 0$ para baixo). A resposta efetiva resulta tipicamente num sistema linear por partes.

nada temporal e x e z as coordenadas espaciais segundo as direções do comprimento e da largura, respectivamente. Assim, o movimento do tabuleiro é equivalente a uma superposição de modos flexionais e torcionais, correspondentes a momentos fletores e a momentos torcedores, tanto na direção x como na direção z .

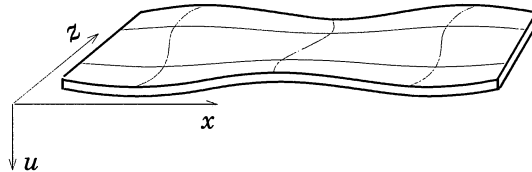


Figura 2.4: Tabuleiro ondulante de uma ponte pênsil modelado na forma de uma placa com deflexões transversais periódicas, resultantes de modos flexionais e torcionais.

Devido à geometria típica desta placa (a largura do tabuleiro é muitas vezes menor do que o seu comprimento), os modos correspondentes aos momentos fletores segundo a direção z e aos momentos torcedores segundo a direção x têm forte preponderância sobre os demais. Isso favorece uma simplificação substancial: o tratamento da *placa* bidimensional como se fosse uma *viga* unidimensional. Seleccionando, numa primeira aproximação, apenas os modos *flexionais* deste movimento, as deflexões transversais periódicas ficam reduzidas à forma $u = u(x, t)$, com a coordenada z tornada ignorável, de acordo com a figura 2.5.

A simplificação seguinte consiste em seleccionar apenas o *primeiro modo flexional* do movimento desta viga, ou seja, a função $u = u(x, t)$ se enquadra no caso particular $u(x, t) = y(t)\sin(x)$, conforme ilustrado na figura 2.6. Com a separação de variáveis, torna-se possível concentrar a atenção *apenas na variação temporal* da deflexão transversal (pois

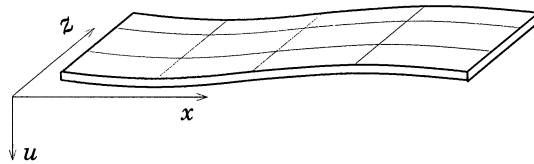


Figura 2.5: *Tabuleiro ondulante de uma ponte pênsil modelado na forma de uma viga com deflexões transversais periódicas, resultantes só de modos flexionais. A coordenada z se torna ignorável.*

agora todos os elementos da viga oscilam em fase, e portanto as deflexões diferem entre si apenas por uma constante multiplicativa). Deve-se observar, também, que no modelo adotado [Doole e Hogan 96], tanto o *carregamento* quanto a *força externa* são introduzidos como funções senoidais da coordenada x (ao longo do comprimento do tabuleiro), com um máximo no centro. Essa escolha é justificada por se tratar de um primeiro termo da expansão em série de Fourier de uma função constante em x (ou melhor, de uma função periódica quadrada em x , no intervalo de meio período). Consequentemente, o desenvolvimento algébrico fica favorecido nessa etapa da separação das variáveis.

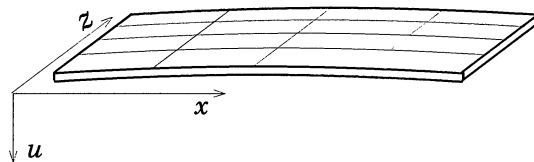


Figura 2.6: *Tabuleiro ondulante de uma ponte pênsil modelado na forma de uma viga, tendo sido selecionado apenas o primeiro modo flexional.*

Nesse caso, portanto, o sistema dinâmico inteiro é reduzido a um oscilador unidimensional, com soluções na forma $y = y(t)$, como o esquematizado na figura 2.7. Este oscilador coincide exatamente com o sistema linear por partes de que o presente trabalho se ocupa.

2.1.4 Equacionamento: viga elástica e oscilador

Para que a equação diferencial do oscilador em estudo tenha um correspondente legítimo no tabuleiro ondulado da ponte pênsil, a abordagem matemática partirá da viga para o oscilador. Considerando, de início, a viga apoiada nas duas extremidades e sujeita apenas ao seu peso próprio, distribuído arbitrariamente ao longo do comprimento, ainda no caso *estático*, a geometria da *linha elástica* da viga é dada pela solução da equação diferencial [Timoshenko 77] (p.149):

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = W(x), \quad (2.1)$$

sendo u a deflexão vertical, tomada positiva para baixo, x a coordenada horizontal, e $W(x)$ a função genérica que modela a distribuição do carregamento (E e I são constantes que representam, respectivamente, o módulo de Young e o momento de inércia da seção

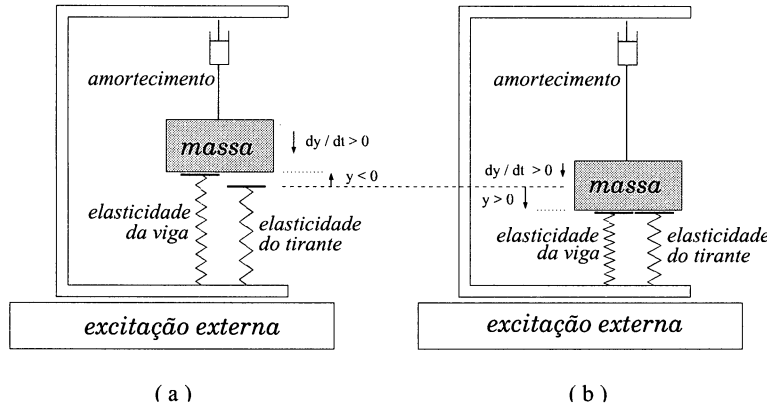


Figura 2.7: Oscilador unidimensional que representa um segmento típico do tabuleiro ondulante da ponte pênsil, em cujo movimento foi selecionado apenas o primeiro modo flexional; ambas as situações (a) e (b) mostram o corpo descendo ($\frac{dy}{dt} > 0$); a partir da passagem de $y < 0$ para $y > 0$, a elasticidade dos tirantes passa a ser somada à da viga.

transversal da viga); ou seja, é necessário integrar *quatro* vezes sucessivas a distribuição de carga $W(x)$ para obter o perfil da deflexão $u(x)$. Isso pode ser compreendido, tendo em vista que a primeira integração de $W(x)$ fornece o *cisalhamento* $\mathcal{V}(x)$, e a segunda fornece o *momento fletor* $\mathcal{M}(x)$; e, por outro lado, a *curvatura* da linha elástica $\frac{d^2u}{dx^2}$ é diretamente proporcional ao momento fletor $\mathcal{M}(x)$ [Timoshenko 77] (p.148). Para o caso dinâmico, basta adicionar à equação (2.1) um termo de inércia, seguido dos termos devidos à elasticidade dos tirantes, à excitação externa e ao amortecimento viscoso, obtendo a equação diferencial parcial linear por partes [Doole e Hogan 96]:

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \delta' \frac{\partial u}{\partial t} &= -k' u + W(x) + F(x, t) \\ &\text{para } u > 0; \\ M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \delta' \frac{\partial u}{\partial t} &= W(x) + F(x, t) \\ &\text{para } u < 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

No primeiro membro de (2.2), a inércia do sistema é representada pelo primeiro termo, sendo M a massa por unidade de comprimento; o segundo termo traduz a elasticidade da viga, e o terceiro a dissipação de energia, com o coeficiente de amortecimento viscoso δ' ; no segundo membro, o primeiro termo representa a elasticidade do conjunto de tirantes, sendo k' uma constante elástica equivalente, limitada à região de deflexões positivas; $W(x)$ é a função genérica que modela a distribuição do carregamento (no caso, uma função senoidal com máximo W' no centro do vão), e $F(x, t)$ o termo de excitação (no caso, a variação temporal é representada por um termo senoidal com frequência angular ω' , e a variação espacial por um termo senoidal com máximo B' no centro do vão, de comprimento L). Portanto,

$$\begin{aligned} &M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \delta' \frac{\partial u}{\partial t} = \\ &= -k' u + W' \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + B' \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin(\omega' t) \quad \text{para } u > 0; \end{aligned}$$

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \delta' \frac{\partial u}{\partial t} = W' \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) + B' \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{sen}(\omega' t) \quad \text{para } u < 0. \quad (2.3)$$

A principal justificativa para essas simplificações é isolar um modo básico de ondução, para viabilizar uma primeira abordagem ao problema. Além disso, no exemplo histórico do acidente ocorrido com a ponte de Tacoma, em 1940, parece ter sido este o modo a perder primeiramente a estabilidade [Billah e Scanlan 91].

É apropriado aqui introduzir variáveis e parâmetros adimensionalizados, tendo em vista facilitar uma interpretação física mais direta, por comparação geométrica das soluções obtidas numericamente, tanto para um mesmo conjunto de parâmetros (diferentes ondulações de uma mesma ponte pênsil) como para conjuntos distintos (ondulações de pontes diferentes). Primeiramente, as variáveis originais devem ser separadas na forma

$$u(x, t) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) y(t), \quad (2.4)$$

ou seja, todos os elementos da viga oscilam em fase, tendo suas deflexões instantâneas diferindo apenas por uma constante multiplicativa (e é nesse contexto que o problema pode ser reduzido ao do oscilador unidimensional, ou seja, suas soluções passam a ser simples séries temporais do valor da deflexão y). As variáveis normalizadas devem ser

$$\hat{x} = \left(\frac{\pi}{L} \right) x, \quad (2.5)$$

$$\hat{t} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{M}} t, \quad (2.6)$$

e por sua vez, os parâmetros escalonados são (os cálculos pormenorizados estão no apêndice (A)):

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \frac{B'}{EI}, \\ W &= \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \frac{W'}{EI}, \\ k &= \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \frac{k'}{EI}, \\ \delta &= \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \frac{\delta'}{2\sqrt{EIM}}, \\ \omega &= \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{M}{EI}} \omega'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A equação diferencial *parcial* da viga ondulante é então reescrita como a seguinte equação diferencial *ordinária* linear por partes, que representa um oscilador unidimensional (e na qual não há mais a necessidade dos circunflexos nas variáveis adimensionalizadas; os *pontos* representam derivadas em relação ao *tempo*; o fator 2 consta no termo de dissipação para manter o máximo de coerência com o modelo adotado na literatura consultada [Doole e Hogan 96]):

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + (k+1)y &= W + B\operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{para } y > 0; \\ \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + y &= W + B\operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{para } y < 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Partindo desse modelo (salvo algumas divergências quanto ao escalonamento), Doole e Hogan empregaram um método analítico para pesquisa de órbitas periódicas estáveis e instáveis, revelando um rico comportamento dinâmico, que envolve bifurcações tanto do tipo tangente como do tipo forquilha, e a coexistência de soluções sub- e super-harmônicas [Doole e Hogan 96]. Contudo, aquele trabalho não foi orientado no sentido de explorar as implicações dinâmicas da coexistência de atratores de diferentes períodos, e tampouco na procura de comportamentos caóticos; tais objetos de estudo fazem parte do presente trabalho, assim como, posteriormente, a inclusão de ruído aleatório ao termo de excitação, da possibilidade de ruptura da mola (ou dos tirantes), e do acoplamento entre dois osciladores (que, na ponte, ocorre desde que se considere a deformabilidade do cabo principal e a conseqüente conexão entre as suas ondulações e as do tabuleiro).

As soluções de 2.8 são acessíveis mediante integração numérica; como se trata de uma equação não-autônoma de segunda ordem, é encaminhada na seqüência a sua preparação para o tratamento numérico.

2.2 Preparação do modelo para a integração numérica

2.2.1 Formato das soluções: fluxo e mapa estroboscópico

Uma vez que se disponha das equações diferenciais *lineares por partes* (2.8) que regem a dinâmica desse oscilador, procede-se a integração numérica, que fornece como resultado as soluções possíveis do sistema. Estas soluções são obtidas na forma de uma seqüência de valores das variáveis associadas ao estado instantâneo do oscilador (no caso, séries temporais contínuas da posição y e da velocidade $\frac{dy}{dt}$, constituindo um *fluxo*) [Guckenheimer e Holmes 83] (p.2). A etapa seguinte é obter, a partir dessa série, um *mapa de Poincaré* [Guckenheimer e Holmes 83] (p.22). Nesse sentido seleciona-se, entre todos os estados da seqüência gerada pela integração numérica, aqueles que correspondem a tempos discretos, os quais são definidos em função do período característico do sistema (no caso, o da excitação externa $T = \frac{2\pi}{\omega}$: cria-se assim um *mapa em tempo T* ou *mapa estroboscópico*) [Alligood *et al.* 96] (p.49). A figura 2.8 esquematiza o fundamento desse processo. A interpretação das soluções deste mapa oferece diversas possibilidades para o estudo do comportamento dinâmico do oscilador linear por partes. Na figura 2.9, as etapas apresentadas neste capítulo estão resumidas na forma de um diagrama de blocos.

2.2.2 O modelo como sistema de equações diferenciais

A equação diferencial 2.8, além de envolver derivadas de segunda ordem, apresenta um termo dependente do tempo, ou seja, é *não-autônoma* [Guckenheimer e Holmes 83] (p.2). Para encaminhar a integração numérica, se faz necessário substituí-la por um sistema de equações diferenciais equivalente, de primeira ordem e autônomo, mediante a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} y_1 &= y; \\ y_2 &= \dot{y}; \end{aligned}$$

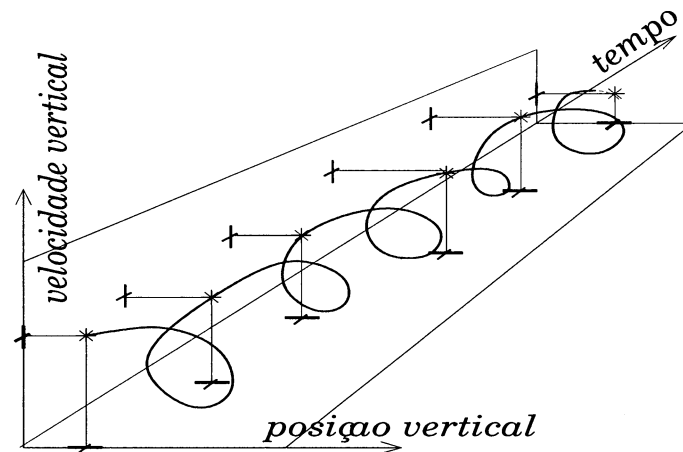


Figura 2.8: Solução do sistema dinâmico na forma de uma série temporal contínua: a curva sólida representa os pares de valores (posição, velocidade) para todos os instantes de tempo (fluxo no espaço de fase). Dessa sequência, são extraídos os pares que constituem a série temporal discreta (asteriscos - mapa estroboscópico).

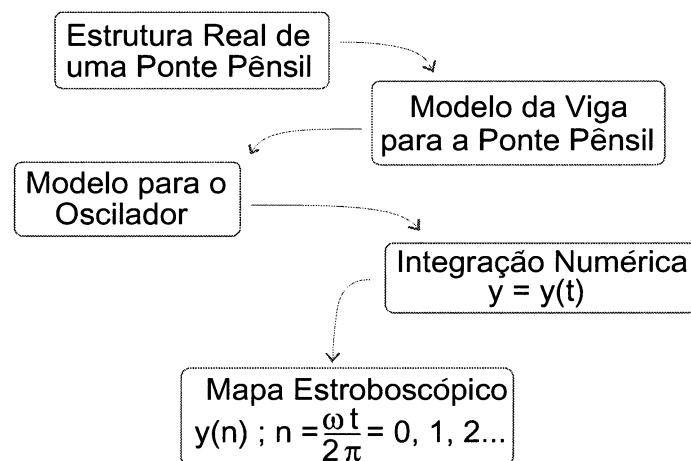


Figura 2.9: Colocação esquemática do problema e da estratégia para sua abordagem: o objeto de estudo é o oscilador unidimensional, obtido por simplificação do modelo dinâmico para o tabuleiro ondulante da ponte pênsil; a integração numérica fornece uma série contínua de estados do oscilador, da qual é extraída uma série discreta por mapeamento estroboscópico, de acordo com a frequência da excitação externa.

$$y_3 = t, \quad (2.9)$$

assim, a derivada segunda \ddot{y} se reduz à derivada primeira \dot{y}_2 , e a equação (2.8) fica escrita na forma de um sistema de equações diferenciais linear por partes:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2; \\ \dot{y}_2 &= -2\delta y_2 - (k+1)y_1 + W + B\sin(\omega y_3); \\ \dot{y}_3 &= 1 \\ &\text{para } y > 0, \\ \\ \dot{y}_1 &= y_2; \\ \dot{y}_2 &= -2\delta y_2 - y_1 + W + B\sin(\omega y_3); \\ \dot{y}_3 &= 1 \\ &\text{para } y < 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Com a forma (2.10), pode ser dada a entrada do sistema numa subrotina para executar a integração numérica, juntamente com cada conjunto de parâmetros e cada conjunto de condições iniciais. A saída da subrotina é a solução do sistema na forma de uma série de ternos $(t, y_1(t), y_2(t))$, ou seja, a posição e a velocidade instantâneas, conforme explicado na subseção anterior (por um abuso de linguagem, essa série discreta, cujo passo pode ser arbitrariamente pequeno, é chamada aqui de “série contínua”). A apresentação gráfica desses resultados pode ser feita, de acordo com a conveniência, na forma de séries temporais ($y_1 \times t$ ou $y_2 \times t$), ou de um retrato de fase ($y_1 \times y_2$) [Alligood *et al.* 96] (p.277). E a partir da série contínua de ternos, são selecionados os estados correspondentes ao mapeamento estroboscópico, baseado no período da excitação externa, que formam a série discreta propriamente dita. É esta série que fornece os dados para a construção de retratos de fase estroboscópicos, diagramas de bifurcação, etc. Esse estudo é desenvolvido nos capítulos (3), (4) e (5). No capítulo (6), o modelo aqui apresentado é parcialmente reformulado para oferecer novas possibilidades de linha de pesquisa.

Capítulo 3

Investigação do modelo dinâmico por simulação numérica

3.1 Considerações iniciais

De forma geral, a pesquisa numérica visa caracterizar as diferentes órbitas no espaço de fase, associadas a diversos comportamentos dinâmicos que sejam típicos do sistema em estudo. Procura-se mudanças qualitativas bruscas nesses comportamentos, provocadas por variações nos parâmetros, e são então exploradas quantitativamente algumas propriedades estatísticas (com o objetivo de descrevê-las, por exemplo, em termos de leis de potência). Como uma primeira etapa desse processamento, é necessário que sejam estipulados, para *cada trajetória* a ser obtida, os valores numéricos dos parâmetros do sistema e das condições iniciais do movimento. E para isso é importante ter-se em vista, em primeiro lugar, que sistemas dinâmicos não-lineares envolvem bifurcações, caracterizadas por mudanças qualitativas bruscas no estado final conforme um parâmetro é variado [Alligood *et al.* 96] (p.447): assim, para cercar toda a riqueza dinâmica do sistema, *várias combinações* de parâmetros devem ser sistematicamente testadas. Em segundo lugar, também são frequentes os casos de comportamento multiestável; assim, para *cada* combinação de parâmetros estipulada, deve-se também testar *diferentes condições iniciais*, para que sejam revelados os diversos estados finais. O processo de *escolha* dos valores de parâmetros a serem calibrados pode ser otimizado adotando-se uma metodologia adequada. Um aspecto a ser considerado é que, tendo em mente as implicações físicas esperadas como consequência dessa calibração, pode-se direcionar a investigação para regiões não-triviais do espaço de parâmetros. Outro recurso disponível é examinar as referências bibliográficas que apresentem exemplos para o mesmo modelo [Doole e Hogan 96], [Lazer e McKenna 90], o que pode fornecer uma primeira alternativa de combinação de parâmetros. A partir daí, podem ser rastreados alguns intervalos de valores, em busca de padrões de comportamento típicos a serem explorados.

Em termos de implicações físicas: espera-se, por exemplo, que uma diminuição muito drástica na elasticidade dos tirantes k torne o sistema por demais semelhante a um oscilador harmônico amortecido e forçado (caso de ressonância linear, já extensivamente estudado na física básica), ao passo que um aumento de k realça efeitos mais interessantes,

decorrentes da não-linearidade. A presença do carregamento W cria condições para que órbitas de pequena amplitude tenham comportamento estritamente linear, se distinguindo assim das de grande amplitude, e proporcionando a possibilidade de coexistência entre dois tipos diferentes de solução (e por sua vez, essa característica distingue este oscilador, inspirado na ponte pênsil, de outros modelos com descontinuidades [Doole e Hogan 96]). Se a excitação externa tiver frequência muito próxima da natural do sistema ($\omega \approx 1$), o comportamento tende a ficar limitado a respostas harmônicas (ou seja, com frequência idêntica à da excitação); e quanto à amplitude dessa excitação B , valores baixos demais criam um sistema que praticamente se confunde com um oscilador amortecido, sempre muito próximo de um único estado de equilíbrio, ao passo que valores muito altos tendem a “escravizar” o sistema, forçando-o a oscilar unicamente na resposta harmônica. Finalmente, o amortecimento δ deve ser de fraco a moderado, pois valores elevados não permitem que o sistema transite por estados intermediários, restringindo assim a diversidade dinâmica.

Nesse contexto, foi escolhido como base um exemplo da bibliografia [Doole e Hogan 96] (que no caso, aplicando um método analítico, explora preferencialmente trajetórias permanentes que atingem um único máximo por período). Os parâmetros correspondentes a esse caso são $k = 10$ (elasticidade dos tirantes), $W = 1$ (carregamento), $\omega = 4$ e $B = 0,5$ (frequência e amplitude da excitação externa), e $\delta = 0,01$ (coeficiente de amortecimento). É um caso de coexistência entre estados periódicos, aparentemente sem manifestação de caos. Partindo dos valores listados, é seguido um procedimento sistemático para estender os intervalos de variação em busca de outros aspectos dinâmicos.

Uma metodologia aplicável, que tem a vantagem de esclarecer de maneira didática o papel desempenhado pelos diferentes parâmetros do sistema, consiste em *zerar* inicialmente *todos* os parâmetros e, a partir desse caso trivial, reintroduzi-los *gradualmente* no modelo, interpretando fisicamente, a cada passo, os efeitos causados na dinâmica. E o fato de se tratar de um oscilador unidimensional favorece, nessa análise, a visualização do plano de fase em termos de fenômeno físico.

Por exemplo, com *todos* os parâmetros zerados, a equação 2.8 se reduz à de um *oscilador harmônico simples*. A introdução gradual e cumulativa dos parâmetros vai acrescentando outros aspectos a esse caso conhecido, até que seja atingida toda a complexidade do caso em estudo. Quanto à *ordem* arbitrada para introdução dos parâmetros, a melhor alternativa consiste em colocar em primeiro lugar a *não-linearidade*, representada pela elasticidade assimétrica dos tirantes $k > 0$, pois, no caso linear ($k = 0$), a introdução direta do carregamento $W > 0$ é equivalente a uma simples translação, e a física básica já trata dos efeitos da excitação (ω, B) e do amortecimento (δ) para esse caso. Com a não-linearidade mantida, porém antes de serem explorados os efeitos da introdução da excitação externa e do amortecimento, é calibrado em segundo lugar o *carregamento* constante $W > 0$, chamando assim a atenção para a diferença criada entre soluções de pequena e de grande amplitude ainda no caso livre e não-amortecido. O terceiro passo é colocar o termo de excitação externa (com amplitude $B > 0$ e frequência $\omega > 0$). A justificativa para se introduzir a excitação externa *antes* do amortecimento é investigar as estruturas do espaço de fase reveladas no caso hamiltoniano (pontos elípticos e hiperbólicos, toros invariantes, cadeias de ilhas, caos homoclínico e global), interpretando-as com apoio no formalismo

hamiltoniano. Finalmente, tendo esses resultados como referência, a introdução do amortecimento $\delta > 0$ tornará possível comparar com essas as estruturas encontradas no caso dissipativo (coexistência de atratores, pontos de sela periódicos, bacias de atração com fronteiras intrincadas, conjuntos caóticos atrativos e não-atrativos). Algumas analogias podem ser então estabelecidas, dando um sentido mais amplo às soluções obtidas pela integração numérica.

Nas seções seguintes, a dinâmica do oscilador que modela a ponte pênsil é explorada em cada passo da introdução dos parâmetros.

3.2 Resultados obtidos com a introdução gradual dos parâmetros

3.2.1 Soluções simétricas: *oscilador harmônico simples*

(Caso $k = 0, W = 0, B = 0, \delta = 0$)

Nesta primeira subseção, parte-se do oscilador referente à equação 2.8, que fornece a deflexão vertical da ponte pênsil para o primeiro modo flexional, já adimensionalizada, aqui com todos os seus parâmetros inicialmente zerados:

$$\ddot{y} + y = 0; \quad (3.1)$$

a equação acima admite solução analítica exata (pois, com todas as simplificações que foram feitas, o sistema foi reduzido a um *oscilador harmônico simples*; o objetivo aqui é preparar o terreno para, nas seções subseqüentes, estudar os efeitos dos parâmetros adicionais). Apenas por questão de metodologia, 3.1 será aqui integrada *numericamente*, para se ter um resultado de referência para os casos seguintes. Os parâmetros do sistema são todos iguais a zero; basta, portanto, arbitrar valores para as condições iniciais. No caso, é suficiente exemplificar o comportamento dinâmico com duas condições diferentes: $(y_{01} = 0, 1; \dot{y}_{01} = -0, 1)$ e $(y_{02} = -0, 5; \dot{y}_{02} = -0, 5)$. As trajetórias contínuas obtidas aparecem na figura 3.1.

Como uma preparação para a seqüência de introdução dos parâmetros, nos parágrafos seguintes este caso é ainda analisado sob o ponto de vista de um potencial, e também pelo formalismo hamiltoniano.

Pode-se interpretar 3.1 como a equação diferencial correspondente a um corpo sujeito ao potencial quadrático $V(y) = \frac{1}{2}y^2$, associado à força restauradora elástica $F(y) = -\frac{dV(y)}{dy}$ (referente apenas à rigidez da viga, conforme a figura 3.2). Assim a equação 3.1 pode ser escrita na forma $\ddot{y} = F(y) = -\frac{dV(y)}{dy}$.

Esse sistema admite uma hamiltoniana na forma

$$H_u(p, y) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} y^2 = \text{const}, \quad (3.2)$$

sendo $p = \dot{y}$ o momento do oscilador, conjugado ao deslocamento para baixo y . Na seqüência, os demais termos, correspondentes à calibração não-nula dos parâmetros, poderão ser acrescentados a 3.2.

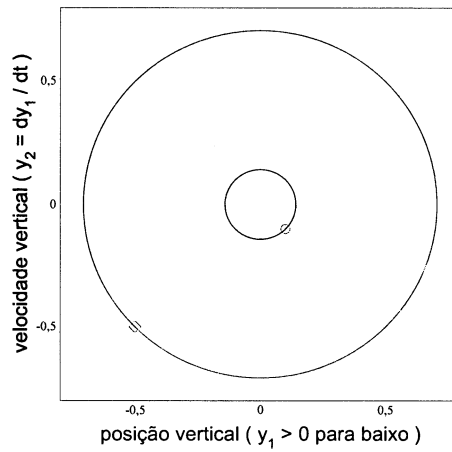


Figura 3.1: *Dois trajetórias contínuas no plano de fase ($y_1 = y, y_2 = \dot{y}$) correspondentes ao oscilador harmônico simples, ou seja, o caso totalmente linear ($k = 0$), não-carregado ($W = 0$), livre ($B = 0$) e sem amortecimento ($\delta = 0$), para diferentes condições iniciais, assinaladas com (◊) e com (○).*

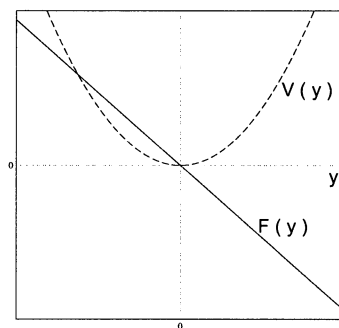


Figura 3.2: *Força elástica e potencial correspondente para o caso $k = 0, W = 0$.*

3.2.2 Soluções assimétricas no oscilador *linear por partes*

(Caso $k > 0, W = 0, B = 0, \delta = 0$)

Com a introdução da elasticidade linear por partes, a equação 2.8 assume a forma

$$\ddot{y} + my = 0, \quad (3.3)$$

que representa compactamente duas sentenças, sendo para isso a função $m(y)$ definida por

$$m(y) = 1 + k\Theta(y), \quad (3.4)$$

na qual $\Theta(y)$ é a função degrau unitária:

$$\begin{aligned} \Theta(y) &= 0 \quad \text{para } y < 0 \\ \Theta(y) &= 1 \quad \text{para } y > 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A integração numérica de 3.3 usa $k = 10$ (conforme o exemplo-base), e as mesmas condições iniciais usadas no oscilador harmônico simples da seção anterior, e fornece como resultado as soluções contínuas da figura 3.3 (se bem que, nessa forma, o sistema ainda seria tratável analiticamente). O efeito da elasticidade assimétrica é traduzido na configuração das curvas, formadas por semi-círculos para $y_1 < 0$ e semi-elipses para $y_1 > 0$. Ou seja, tem-se ainda soluções periódicas, de energia constante, mas o movimento vertical do oscilador (ou da ponte) envolve um *salto* para cima, por ter sido a massa, naquele trecho, liberada da elasticidade dos tirantes.

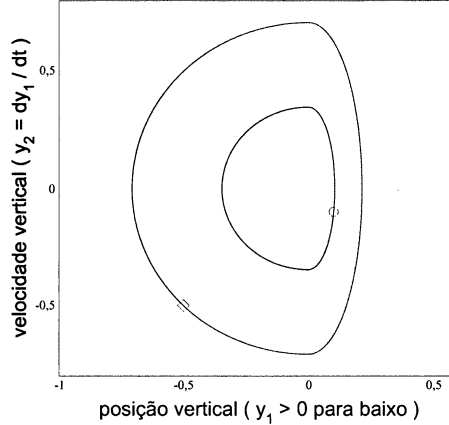


Figura 3.3: *Dois trajetórias contínuas no plano de fase ($y_1 = y, y_2 = \dot{y}$), assimétricas, correspondentes ao oscilador linear por partes ($k = 10$), ainda não-carregado ($W = 0$), livre ($B = 0$) e sem amortecimento ($\delta = 0$), para diferentes condições iniciais, assinaladas com (o) e com (◊).*

O potencial elástico associado a este caso se escreve compactamente como $V(y) = \frac{1}{2}my^2$, sendo $m(y)$ dado por 3.4 (figura 3.4).

A alteração na hamiltoniana do oscilador harmônico simples 3.2 se manifesta na forma

$$H_u(p, y) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}my^2 = \text{const.} \quad (3.6)$$

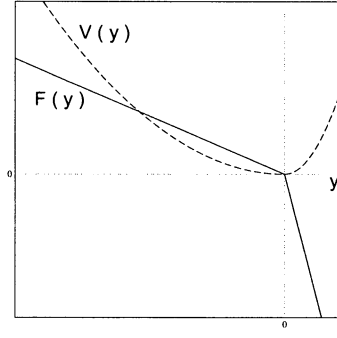


Figura 3.4: Força elástica assimétrica e potencial correspondente para o caso $k > 0, W = 0$.

3.2.3 Coexistência de soluções assimétricas e simétricas no oscilador linear por partes *e carregado*

(Caso $k > 0, W > 0, B = 0, \delta = 0$)

A introdução do carregamento acrescenta um termo constante à equação 2.8:

$$\ddot{y} + my = W. \quad (3.7)$$

Para a integração numérica de 3.7, os parâmetros do exemplo-base são $W = 1$ e $k = 10$. Além das condições iniciais já adotadas ($y_{01} = 0, 1; \dot{y}_{01} = -0, 1$) e ($y_{02} = -0, 5; \dot{y}_{02} = -0, 5$), é acrescentada ($y_{03} = 0, 1; \dot{y}_{03} = 0, 5$). As trajetórias aparecem na figura 3.5. O efeito do carregamento sobre as trajetórias assimétricas da seção anterior se traduz de duas maneiras alternativas: curvas fechadas, compostas por arcos de círculo para $y < 0$ concordantes com arcos de elipse para $y > 0$, ou elipses perfeitas, situadas inteiramente no semi-plano $y > 0$, centradas no ponto de equilíbrio estável situado em

$$y_0 = \left(\frac{W}{k+1}, 0 \right). \quad (3.8)$$

Como consequência do carregamento, nas trajetórias de grande amplitude, o valor máximo da velocidade *não* ocorre no mesmo instante em que a posição se anula, o que chama a atenção para uma das implicações da não-linearidade: o termo correspondente ao carregamento, apesar de ser um valor constante, não pode ser eliminado por uma simples translação. Isso fica claro escrevendo 3.7 em termos de um *potencial efetivo*, na forma $\ddot{y} = F_{eff}(y) = -\frac{dV_{eff}(y)}{dy}$. Nesse caso,

$$V_{eff}(y) = -Wy + \frac{1}{2}my^2 \quad (3.9)$$

inclui tanto os efeitos da elasticidade linear por partes (k) quanto os do carregamento (W); a figura 3.6 mostra esse potencial, devendo-se notar a formação de um pequeno poço harmônico, que possibilita a existência das órbitas simétricas (“órbitas carregadas”) para pequenas amplitudes. Contudo, espera-se uma dinâmica bem mais rica para os movimentos amplos, pois neles a não-suavidade do potencial efetivo deve desempenhar um

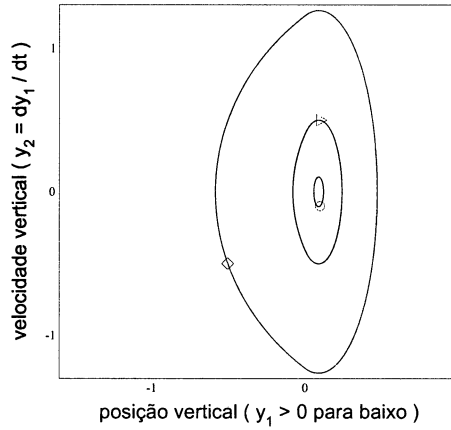


Figura 3.5: Três trajetórias contínuas no plano de fase ($y_1 = y, y_2 = \dot{y}$) correspondentes ao oscilador livre e sem amortecimento, com $k = 10$ e $W = 1$, para diferentes condições iniciais, assinaladas com (◦), (◊) e (▷). Órbitas carregadas se situam inteiramente no semi-plano $y > 0$.

papel crucial. Embora aqui tenha-se optado pela integração numérica, alguns casos particulares ainda poderiam ser tratados por métodos analíticos aproximados [Cao *et al.* 01], [Kim e Noah 91].

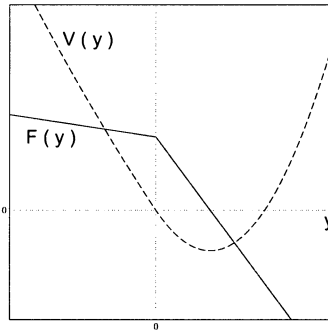


Figura 3.6: Força efetiva e potencial correspondente para o caso $k > 0, W > 0$.

A hamiltoniana, neste caso, é ainda integrável no sentido de Liouville [Lichtenberg 97], tendo a forma

$$H_u(p, y) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}my^2 - Wy = \text{const}; \quad (3.10)$$

na seção seguinte, a introdução da excitação externa ($B > 0$) acrescentará nessa hamiltoniana um termo perturbativo, quebrando sua integrabilidade.

3.2.4 Quase-periodicidade, caos homoclínico e caos global no oscilador linear por partes, carregado e forçado

(Caso $k > 0, W > 0, B > 0, \delta = 0$)

Mantendo ainda o amortecimento nulo ($\delta = 0$), mas passando para o caso forçado ($B > 0$), a equação 2.8 assume a forma

$$\ddot{y} + my = W + B \sin(\omega t). \quad (3.11)$$

O termo de excitação não-nulo introduz no sistema uma *nova frequência*, que serve de base para proceder o *mapeamento estroboscópico*: esse procedimento se torna oportuno à medida que cresce a complexidade das soluções contínuas obtidas pela integração numérica. Assim, no caso forçado, passa a ser mais conveniente selecionar apenas uma amostragem discreta de cada trajetória contínua, nos tempos $t = \frac{2\pi n}{\omega}$ (figura 2.8). Os parâmetros do exemplo-base são $B = 0,5$, $\omega = 4,0$, $W = 1$ e $k = 10$. As condições iniciais são as mesmas adotadas na seção anterior, acrescentadas de $(y_{04} = 0,5; \dot{y}_{04} = -0,5)$. A figura 3.7 mostra as diferentes órbitas do mapa estroboscópico. Observe-se a distinção entre o significado das curvas fechadas nessa figura e daquelas nas figuras 3.5, 3.3 e 3.1: agora *não se trata* de trajetórias contínuas; as curvas são densamente preenchidas pelos pontos de interseção das trajetórias contínuas com a superfície de Poincaré. Conforme será esclarecido na sequência, consistem em respostas *quase-periódicas* associadas à proximidade de *ressonâncias*. Deve-se lembrar que na figura 3.7 constam apenas quatro órbitas diferentes, obtidas com o uso de quatro condições iniciais, assinaladas com (\circ) , (\triangleright) , (\diamond) e (\triangleleft) .

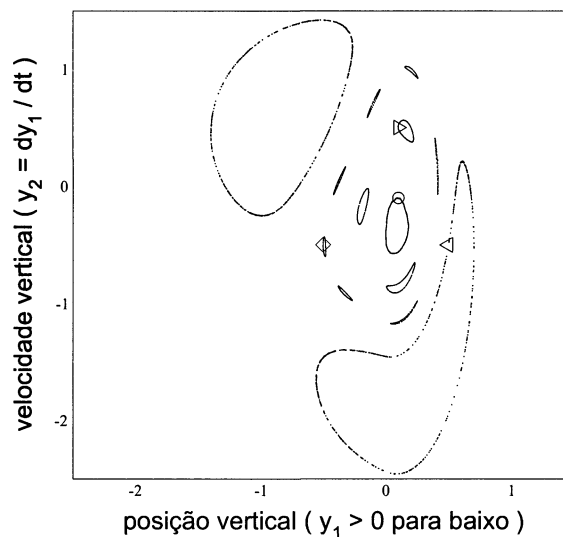


Figura 3.7: Quatro órbitas do mapa estroboscópico no plano de fase ($y_1 = y, y_2 = \dot{y}$) correspondentes ao oscilador forçado sem amortecimento, com $B = 0,5$, $\omega = 4,0$, $W = 1$, e $k = 10$, para diferentes condições iniciais, assinaladas com (\circ) , (\diamond) , (\triangleright) e (\triangleleft) .

Para uma melhor compreensão das estruturas na figura 3.7, é conveniente aqui abordar o problema pelo formalismo hamiltoniano, já tendo sido preparado o terreno nas subseções

precedentes. A complexidade verificada no presente caso é decorrente da perda da integrabilidade, causada pela dependência explícita do tempo, que consta no termo de excitação somado à hamiltoniana da seção anterior:

$$H_f(p, y, t) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}my^2 - Wy - B \text{ysen}(\omega t). \quad (3.12)$$

Com base na expressão acima, pode-se justificar importantes aspectos dinâmicos do oscilador para esse caso, associados à estrutura do espaço de fase, o qual mostra analogias com a dinâmica de um pêndulo não-linear [Lichtenberg 97] (p.25). No entanto, fazem-se necessários alguns procedimentos algébricos até que se chegue à forma 3.18, que favorece essas analogias.

A primeira medida a ser adotada é manipular a hamiltoniana de forma que ela absorva o efeito do carregamento, mediante uma *transformação canônica* $(p, y, t) \rightarrow (p_z, z, t)$, sendo a origem deslocada desde $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ até o equilíbrio em $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 = \left(\frac{W}{k+1}, 0\right)$. A *função geratriz* envolvida nessa transformação é

$$F_2(p_z, y, t) = (y - y_0)p_z = \left(y - \frac{W}{1+k}\right)p_z, \quad (3.13)$$

tal que a nova hamiltoniana, a menos de uma constante, seja

$$\begin{aligned} \bar{H}_f(p_z, z, t) = & \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}k\Theta(y)z^2 - \\ & -B \left(z + \frac{W}{1+k}\right) \text{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Na seqüência, a *dependência no tempo* pode ser tratada formalmente mediante o recurso de criar um *espaço de fase estendido*. Para tanto, é introduzida a coordenada adicional $t \equiv \tau$, que tem como momento conjugado $E = -\bar{H}_f$ [Lichtenberg 97] (p.15); nesse contexto, pode ser adotado um parâmetro auxiliar ξ para desempenhar o papel do tempo. No espaço de fase estendido, a hamiltoniana do sistema forçado é expressa na forma

$$\begin{aligned} H_e(p_z, E; z, \tau) = & \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2}z^2 + E + \frac{1}{2}k\Theta(z(y))z^2 - \\ & -B \left(z + \frac{W}{1+k}\right) \text{sen}(\omega\tau) = \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Observe-se que a dinâmica de 3.15 é equivalente à de um sistema *autônomo* com *dois* graus de liberdade. Porém, permanece sendo não integrável, posto que não é conhecida, independentemente de \mathcal{E} , outra integral do movimento.

Tendo-se chegado a 3.15, o próximo passo é identificar os seus dois primeiros termos com a hamiltoniana do oscilador harmônico simples. Introduz-se então as *variáveis de ação e ângulo* correspondentes a ele (J, θ) , definidas como [Lichtenberg 97] (p.22)

$$z = \sqrt{2J} \text{sen}\theta, \quad p_z = \sqrt{2J} \cos\theta, \quad (3.16)$$

de maneira que 3.15 se torna

$$\begin{aligned} H(J, E; \theta, \tau) = & J + E + k\Theta(y(J, \theta))J \text{sen}^2\theta - \\ & -B \left(\sqrt{2J} \text{sen}\theta + \frac{W}{1+k}\right) \text{sen}(\omega\tau). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalmente, para as variáveis de ação e ângulo relacionadas ao par tempo-energia $(J_\vartheta, J_\varphi; \vartheta, \varphi)$, é feita uma segunda transformação canônica. A função geratriz usada é $\tilde{F}_2(J_\vartheta, J_\varphi; \theta, \tau) = \omega\tau J_\varphi + \theta J_\vartheta$. O resultado fornece a hamiltoniana para o oscilador linear por partes, carregado e forçado (mas ainda sem amortecimento, na forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(J_\vartheta, J_\varphi; \vartheta, \varphi) &= \mathcal{H}_0(J_\vartheta, J_\varphi) + \mathcal{H}_1(J_\vartheta, J_\varphi; \vartheta, \varphi) = \\ &= J_\vartheta + \omega J_\varphi + k\Theta(y(J_\vartheta, \vartheta)) J_\vartheta \sin^2 \vartheta - \\ &- B \sin \varphi \left(\sqrt{2J_\vartheta} \sin \vartheta + \frac{W}{1+k} \right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Agora, pode-se dar início à análise dinâmica propriamente dita: observe-se que o espaço de fase estendido tem *quatro* dimensões. No entanto, o fato de $\mathcal{E} = \mathcal{E}(J_\vartheta, J_\varphi; \vartheta, \varphi) = \text{const.}$ implica que as trajetórias do sistema estejam restritas a uma superfície de energia *tridimensional*, existindo assim apenas três variáveis independentes. E sendo uma delas o ângulo $\varphi = \varphi_0 + \omega t \pmod{2\pi}$, isso possibilita que se estude o sistema usando uma superfície de seção de Poincaré *bidimensional* construída em $\varphi = 0$. É esse processo que fornece o *mapa estroboscópico* em tempo T , sendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

No sistema contínuo, as duas variáveis de ângulo (ϑ e φ) caracterizam a foliação do espaço de fase em superfícies fechadas, com topologia de *toros aninhados*. Então, na superfície de Poincaré, as seções transversais desses toros invariantes devem aparecer como *curvas fechadas*. As duas frequências, relacionadas a esses dois ângulos que parametrizam a dinâmica sobre os toros, são definidas em termos da parte não-perturbada da hamiltoniana dada por 3.18:

$$\omega_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_\vartheta} = 1, \quad \omega_\varphi = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_\varphi} = \omega,\tag{3.19}$$

sendo ω_φ identificável com a frequência da excitação externa, e $\omega_\vartheta = 1$ com a frequência das órbitas fechadas do oscilador harmônico não-perturbado ($H_0(J) = J$).

A resposta dinâmica do sistema forçado depende significativamente do quociente entre estas duas frequências, ou seja, do *número de rotação* (“winding number”)

$$\alpha = \frac{\omega_\vartheta}{\omega_\varphi} = \frac{1}{\omega}.\tag{3.20}$$

Por exemplo, se o número de rotação for racional na forma $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros coprimos, as frequências são então *comensuráveis*, no sentido de que existem valores inteiros de m e n que satisfazem $m\omega_\varphi - n\omega_\vartheta = 0$. Isso representa uma *ressonância primária* $m : n$, classificada segundo os seguintes casos [Wiggins 97] (pp.73-78): $m > 1$ e $n > 1$ (resposta ultra-sub-harmônica de ordem m, n), $m > 1$ e $n = 1$ (resposta sub-harmônica de ordem m), ($m = 1$ e $n > 1$) (resposta ultra-harmônica de ordem n), e $m = n = 1$ (resposta harmônica).

Uma ressonância $m : n$ é interpretada como uma trajetória que se fecha sobre si mesma após completar m ciclos longos no toro (coordenada φ) e n ciclos curtos (coordenada ϑ). Tem-se, conseqüentemente, na superfície de seção de Poincaré (J_ϑ, ϑ) , m pontos distintos para uma determinada ressonância $m : n$. Esses pontos do mapa em tempo T se referem a uma órbita periódica *marginamente estável*, cujos autovalores, em valor absoluto, são unitários. Na estrutura de toros aninhados, essas órbitas periódicas ficam arbitrariamente

próximas uma da outra, pois os valores inteiros de m e n podem ser arbitrariamente altos. Já se o número de rotação α for *irracional*, uma trajetória não fecha jamais sobre si mesma: nesse caso, o toro correspondente acaba por ser densamente preenchido. E na seção de Poincaré, tal trajetória fica então representada por uma curva contínua e fechada (resposta *quase-periódica*) [Wiggins 97] (p.78).

Levando em conta as considerações teóricas desenvolvidas acima, referentes ao oscilador linear por partes carregado, forçado e não-amortecido, pode-se agora direcionar melhor a simulação numérica para uma apreensão mais completa da estrutura revelada na figura 3.7, usando os mesmos parâmetros, mas selecionando as *condições iniciais* a serem arbitrárias. Para tanto, é processada primeiramente uma malha de N^2 condições iniciais, gerando um igual número de órbitas no mapa estroboscópico, entre as quais são selecionadas algumas, que indicam melhor a localização dos pontos elípticos, das respostas quase-periódicas e das camadas caóticas: o resultado dessa seleção aparece na figura 3.8. Note-se que a seção de Poincaré é bidimensional; de acordo com o exposto nos parágrafos acima, ela representa um corte das superfícies de energia tridimensionais (toros), referentes ao espaço de fase estendido tetradimensional, cujos aspectos dinâmicos são traduzidos na configuração desses pontos estroboscópicos no plano da figura. Isso possibilita alguns esclarecimentos sobre a diversidade de comportamentos dinâmicos do sistema para este caso.

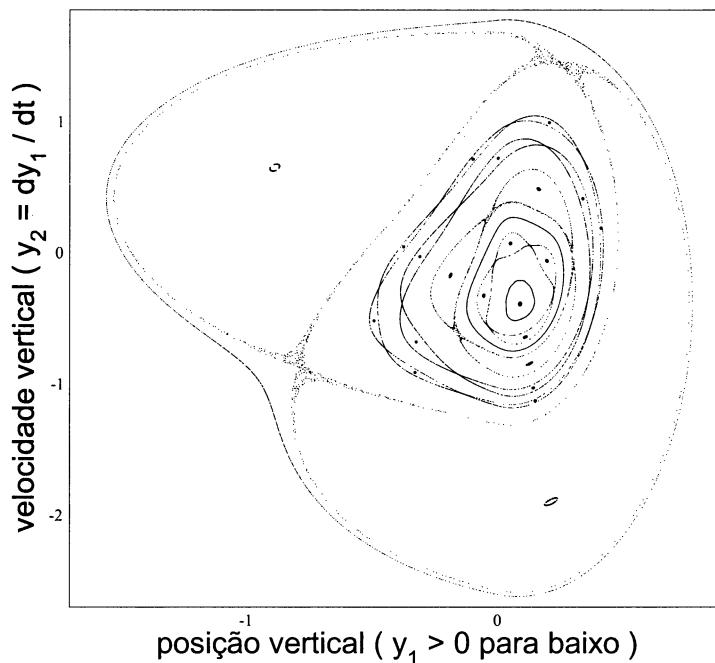


Figura 3.8: Mapa estroboscópico no plano de fase ($y_1 = y, y_2 = \dot{y}$) correspondente ao oscilador forçado sem amortecimento, com $B = 0,5$; $\omega = 4,0$; $W = 1$; e $k = 10$, para quatorze condições iniciais diferentes.

Na figura 3.8 fica, por exemplo, evidenciada a localização dos *pontos elípticos*. Um deles é uma ressonância harmônica (1 : 1) próxima da origem do plano de fase .

Quanto às condições iniciais *na vizinhança* dessa ressonância 1 : 1, pode-se afirmar que geram trajetórias que interceptam a seção de Poincaré *preenchendo densamente* cur-

vas fechadas aproximadamente elípticas e concêntricas, e correspondem a regimes *quase-periódicos* do oscilador. Para visualizar uma dessas trajetórias contínuas imagine-se, na superfície de um toro, um traço longitudinal que nunca se fecha, acabando assim por recobrir toda a superfície (o *eixo* desse toro é a trajetória ressonante 1 : 1).

Os outros pontos elípticos revelados agrupam-se em ressonâncias ultra-sub-harmônicas e sub-harmônicas (4 : 3, 3 : 2, 5 : 3, 7 : 4, 2 : 1, afastando-se radialmente da origem; os valores de n são identificáveis pelo número de laços na projeção das trajetórias contínuas, as quais foram omitidas desta figura). Dinamicamente, esses pontos fixos do mapa indicam regimes *periódicos* do oscilador, marginalmente estáveis, com frequências que são submúltiplos inteiros de ω . O conjunto de m pontos de uma ressonância $m : 1$ corresponde, na estrutura de toros, a uma curva contínua que se fecha sobre si mesma depois de m voltas.

E analogamente, verifica-se outros regimes quase-periódicos, nas proximidades dessas ressonâncias sub-harmônicas. Para a visualização das trajetórias contínuas, imagine-se uma superfície de energia semelhante a um tubo flexível dando m voltas e com suas extremidades unidas: o *eixo* do tubo seria a trajetória periódica $m : 1$, e um traço longitudinal sobre a sua *superfície* seria a essa trajetória quase-periódica. Na seção de Poincaré, cada regime desses se revela como um conjunto de pontos que preenchem densamente um número m de curvas fechadas, aproximadamente elípticas, ditas *ilhas*, que compõem uma *cadeia*. Isso significa que a trajetória visita alternadamente, a cada $T = \frac{2\pi}{\omega}$, uma das m “elipses” pertencentes à mesma cadeia. Então uma cadeia de ilhas no plano de fase é topologicamente semelhante às trajetórias contínuas de um pêndulo não-linear, no sentido de que, em ambos os casos, são caracterizadas *librações* (a rigor, os pontos fixos obtidos numericamente na figura 3.8 também são ilhas com largura muito pequena, posto que, sendo a dinâmica marginalmente estável, os pontos elípticos são estatisticamente inacessíveis).

Os pontos fixos instáveis (*pontos hiperbólicos*, ou *pontos de sela*) também não são diretamente acessíveis por pesquisa numérica, mas uma condição inicial em sua vizinhança gera uma *trajetória caótica*, a qual não se situa sobre uma superfície de energia, e que aparece na seção de Poincaré como uma região densa porém delgada, a qual estabelece assim os limites para a extensão das libações na figura 3.8. Tal comportamento (dito *caos homoclínico*) é explicado pelo infinito número de cruzamentos entre as variedades estável e instável dos pontos hiperbólicos que conectam as ilhas adjacentes em uma mesma cadeia [Lichtenberg 97] (p.186). A região delimitada por essa trajetória caótica permite caracterizar uma *largura de ilha*, que cresce com a raiz quadrada da intensidade da perturbação [Lichtenberg 97] (p.114), a qual, por sua vez, é proporcional à amplitude da excitação B .

Constata-se também que essas ilhas, chamadas *primárias*, podem ser rodeadas por *ilhas secundárias* menores, correspondentes a harmônicos entre uma das frequências fundamentais e a frequência da libração nas ilhas primárias, e essa estrutura pode se repetir em escalas arbitrariamente finas. Na figura 3.9, foi selecionada uma trajetória típica de ilha secundária (a fim de salientar a largura, a amplitude da excitação foi ligeiramente aumentada para $B = 0,75$).

A comparação do caso forçado com os explorados nas subseções precedentes evidencia um significativo aumento na diversidade dos fenômenos possíveis exibidos pelo sistema

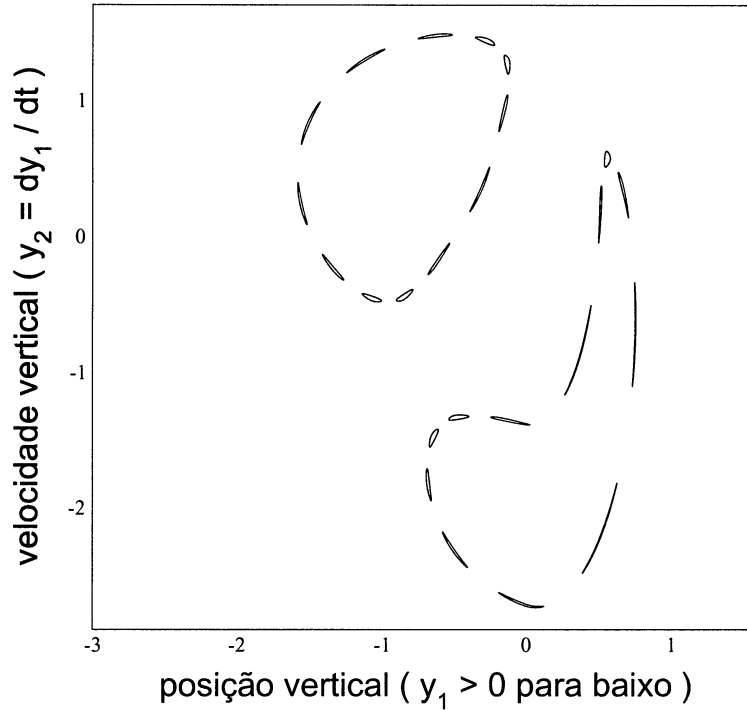


Figura 3.9: *Cadeia de ilhas secundárias para o sistema com $B = 0,75$; $\omega = 4,0$; $W = 1$; e $k = 10$.*

dinâmico. Suponha-se que sejam dadas ao oscilador uma posição e uma velocidade iniciais, e que ele seja iluminado estroboscopicamente, com o período da excitação. Dependendo dessa inicialização, o movimento observado se enquadraria numa das três alternativas que seguem. Se em oscilação regular (ressonâncias $m : 1$), apareceria sempre nas mesmas m posições (o movimento *contínuo* tem um período m vezes maior que o da excitação). Nos regimes quase-periódicos, se for, por exemplo, muito próximo à ressonância $1 : 1$, a imagem estroboscópica parece oscilar continuamente com pequena amplitude (no plano de fase, uma pequena elipse circundando a ressonância central); e num caso quase-periódico mais geral, a imagem fica “saltando” sem repetir posições, contudo sempre restrita um padrão, correspondente às elipses que formam uma das cadeias de ilhas no plano de fase (sejam elas primárias, secundárias ou de ordem ainda superior). E no caos homoclínico, os “saltos” seriam mais irregulares, porém ainda confinados a um padrão semelhante ao das ilhas, o qual compõe a camada densa e delgada que limita a largura delas no plano de fase. Aqui fica claro como o fato de se tratar de um sistema mecânico, macroscópico, e de baixa dimensionalidade, favorece a compreensão dos fenômenos por um ponto de vista físico.

O resultado mostrado na figura 3.8 poderá ser confrontado com aquele obtido para o caso dissipativo, na seção seguinte. Mas antes de passar à análise dos efeitos do amortecimento, pode-se explorar melhor o caso hamiltoniano com respeito ao comportamento caótico, que servirá de referência, no capítulo (5), para o exemplo de caos dissipativo: a *teoria KAM* afirma que as cadeias de ilhas são originadas da destruição dos toros racionais sob uma perturbação suficientemente fraca (a maioria dos toros irracionais são preserva-

dos, ainda que sofram deformações); e em torno de uma dada cadeia, é formada a camada caótica densa observada no exemplo acima. À medida que a perturbação é calibrada em valores mais altos, a camada vai crescendo, e com ela a largura da ilha. Nesse processo, camadas caóticas pertencentes a cadeias próximas chegam a se amalgamar, engolindo cadeias intermediárias, constituindo o chamado *caos global* [Lichtenberg 97] (p.51).

Enquanto a perturbação tem um valor moderado, podem ainda sobreviver trajetórias quase-periódicas (*toros KAM*) entre cadeias próximas, os quais funcionam como barreiras entre as camadas caóticas vizinhas, impedindo excursões muito amplas de qualquer trajetória. Contudo, para perturbações mais altas, os toros KAM são progressivamente destruídos, e as camadas vizinhas se aglomeram, resultando em trajetórias caóticas que realizam excursões de larga escala [Lichtenberg 97] (p.245).

Então, para simular numericamente um caso de caos hamiltoniano global, deve-se intensificar o valor da perturbação, o que no caso se traduz como um aumento na amplitude da excitação externa B . É conveniente, para tanto, salientar os efeitos da não-linearidade, aumentando também a elasticidade dos tirantes k . O resultado é exposto na figura 3.10, para a qual foram calibrados $B = 3,0$ e $k = 50$. Contrastando com o profuso número de ressonâncias mostrado na figura 3.8, neste caso apenas a ressonância $2 : 1$ é ainda visível, o que indica que as outras ilhas foram engolidas no processo de crescimento das camadas caóticas (salvo as que são delgadas demais para serem detectadas numericamente). Curvas quase-integráveis circundam uma ampla região do plano de fase, parte da qual é vastamente ocupada pela camada caótica.

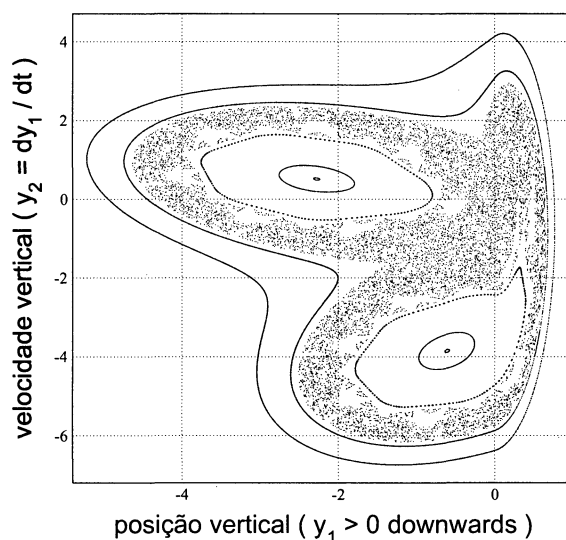


Figura 3.10: *Trajétoria caótica coexistindo com trajetórias quase-periódicas no espaço de fase para valores mais altos da amplitude de excitação ($B = 3,0$) e elasticidade dos tirantes ($k = 50$), tendo sido usadas seis condições iniciais diferentes (os demais parâmetros são idênticos aos das figuras precedentes).*

Entre o regime caótico correspondente à camada delgada e densa (figura 3.8) e o global (figura 3.10) existe um limite de transição extensivamente estudado [Chirikov 79].

Mas mesmo no caso de caos global, a ampla região caótica permanece sendo limitada por superfícies KAM que circundam toda a estrutura. Assim, ainda para altas amplitudes de excitação, não se pode garantir que o comportamento seja caótico em *qualquer* região sobre a superfície de energia; mais correto seria afirmar que ocorre uma *difusão estocástica* de órbitas densas sobre uma *região ampla, mas limitada* do espaço de fase. Remetendo ao oscilador iluminado estroboscopicamente: se inicializado nessa região, a observação resultaria em “saltos” semelhantes aos do caos homoclínico, mas visitando densamente uma gama muito maior de posições.

Na seção seguinte será calibrado, no oscilador não-linear, carregado e periodicamente forçado, o termo de amortecimento ($\delta > 0$). As superfícies de energia dos casos hamiltonianos deixam então de existir, dando aparecimento a estruturas bastante diversas, mas que admitem uma série de analogias com as duas combinações de parâmetros estudadas nesta seção: para baixos B e k , a conformação em diversas cadeias de ilhas é traduzida na forma de diferentes bacias de atração (multiestabilidade); para altos B e k , a presença da ressonância $2 : 1$ e da região de difusão estocástica dá origem à coexistência entre um atrator periódico e um atrator caótico. E essas duas situações serão, em separado, devidamente exploradas, nos capítulos (4) e (5).

3.2.5 Coexistência de estados assintóticos no oscilador linear por partes, carregado, forçado e amortecido

(Caso $k > 0, W > 0, B > 0, \delta > 0$)

O último dos parâmetros a ser introduzido, completando assim todos os termos de 2.8, é o coeficiente de amortecimento $\delta > 0$. Reunindo os parâmetros calibrados nas subseções anteriores ($k = 10; W = 1; \omega = 4; B = 0,5$) com $\delta = 0,01$, chega-se a um caso idêntico ao explorado na bibliografia citada [Doole e Hogan 96], na qual foram calculadas analiticamente órbitas regulares com período pré-fixado. Pode-se então conferir os resultados tentando reproduzir numericamente algumas órbitas, aproveitando para dar a elas uma interpretação física, com o auxílio do que foi exposto nas seções precedentes. Para tanto, testa-se as quatro condições iniciais já empregadas no caso hamiltoniano: $(y_{01} = 0, 1; \dot{y}_{01} = -0, 1)$, $(y_{02} = -0, 5; \dot{y}_{02} = -0, 5)$, $(y_{03} = 0, 1; \dot{y}_{03} = 0, 5)$ e $(y_{04} = 0, 5; \dot{y}_{04} = -0, 5)$. Para cada uma delas, as perdas de energia causadas pela dissipação vão sendo equilibradas pela injeção externa e, após um regime irregular de duração variável (dito *transiente*), são revelados três estados assintóticos periódicos (três e não quatro, porque duas delas convergiram para o mesmo estado final). As trajetórias contínuas no espaço de fase são mostradas na figura 3.11 na forma de três *ciclos-limite*. Em termos do mapa em tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, formado pelos estados que satisfazem à condição $\omega y_3 = 2n\pi; n = 0, 1, 2, \dots$ (ou seja, a estroboscopia é baseada no período da excitação externa), tais estados assintóticos correspondem a *pontos fixos* estáveis.

Interpretando fisicamente, o cenário criado pela introdução do amortecimento se distingue daquele existente no caso hamiltoniano, por agora envolver *atratores*. As variáveis envolvidas são a posição vertical e a velocidade vertical do oscilador (ou, por extrapolação, do tabuleiro da ponte, ondulando no primeiro modo flexional). No exemplo simulado aci-

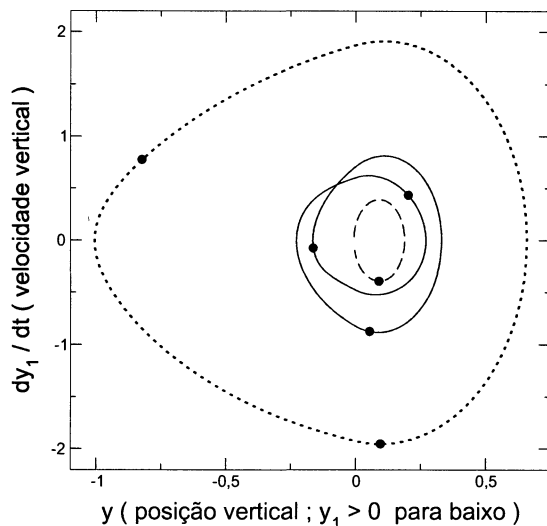


Figura 3.11: *Estados finais alternativos para $\delta = 0,01$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4,0$; $B = 0,5$; $W = 1$; e $k = 10$. Os pontos fixos do mapa estroboscópico aparecem marcados sobre os ciclos-limite.*

ma, para cada inicialização diferente, o tabuleiro se põe a oscilar (de início irregularmente), convergindo depois para *um* entre três estados periódicos alternativos. É interessante caracterizar estes estados tanto em termos do movimento contínuo como da estroboscopia. Tecnicamente, fica mais fácil distinguir os ciclos-limite por sua *amplitude*, associada à posição máxima da série temporal. Por outro lado, em termos de período, o número de laços mostrados no plano de fase pela trajetória contínua (n) geralmente *não corresponde* ao número de máximos da força externa (m) registrados em um período completo do ciclo. Na figura 3.11, isso fica claro para as duas trajetórias mais amplas: o maior dos ciclos-limite atinge *um único máximo*, mas está associado a uma resposta sub-harmônica 2 : 1 (remanescente do caso hamiltoniano da seção anterior), ou seja, a *seção de Poincaré* consiste em um *ponto fixo* do mapa estroboscópico de *segundo retorno*; quando a análise do sistema dinâmico é focalizada na seção de Poincaré, essa solução é dita um “*atrator de período 2*”; quanto à solução de amplitude intermediária, é um atrator de período 3, apesar de serem verificados *dois* máximos na trajetória contínua (resposta ultra-sub-harmônica 3 : 2). Nesse sentido, ao confrontar resultados com os obtidos por outros autores, é prudente ter sempre em mente essa distinção.

As trajetórias assimétricas da figura 3.11 guardam semelhança com retratos de fase para outros tipos de osciladores lineares por partes, encontrados na literatura [Wiercigroch e Sin 98], [Kim e Noah 91], [Thompson *et al.* 83].

Os pontos da malha de condições iniciais testadas para levantamento dos estados finais alternativos podem ser separados em *bacias de atração* [Lichtenberg 97] (p.461), conforme a figura 3.12. Observa-se que a bacia correspondente a cada resposta sub-harmônica está dividida em subconjuntos (semelhantes a lagos) que cercam os pontos estroboscópicos, conectados a canais que espiralam se afastando da origem do espaço de fase. Essa configuração é recorrente em osciladores não-lineares, tendo como exemplo-base o modelo de Duffing [Wiggins 97] (p.44). Para identificação dos diversos atratores na rotina computa-

cional, não é conveniente proceder a comparação com base nas coordenadas dos pontos estroboscópicos: o fato de terem períodos diferentes dificulta o algoritmo. Neste trabalho, optou-se por comparar a posição máxima nas séries temporais contínuas.

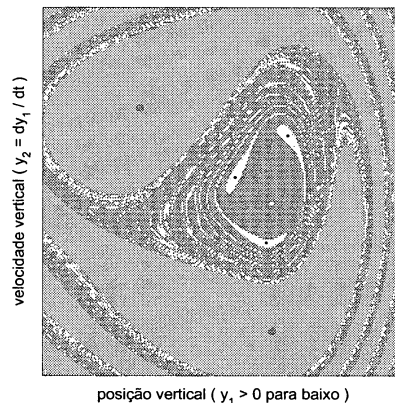


Figura 3.12: *Bacias de atração para $W = 1$; $k = 10$; $\delta = 0,01$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4,0$; e $B = 0,5$. Distinguem-se três atratores, correspondentes às condições iniciais em cinza claro (período 1), em cinza escuro (período 2) e em branco (período 3).*

O comportamento multiestável verificado nesse exemplo é típico de um oscilador linear por partes fracamente amortecido, respondendo sub-harmonicamente à excitação externa, na forma de ciclos-limite alternativos. Na seção de Poincaré, os diferentes atratores periódicos são remanescentes dos pontos elípticos do caso hamiltoniano correspondente ($\delta = 0$), agora com autovalores complexos conjugados, com módulo menor do que 1, caracterizando *focos estáveis*. Na *vizinhança* de um foco estável, os pontos estroboscópicos se aproximam dele assintoticamente, sendo mapeados ao longo de curvas espiraladas; essa região central da bacia de atração é remanescente das curvas de libração (ilhas) do caso hamiltoniano, ao passo que o canal que se afasta da origem do espaço de fase indica que mesmo condições iniciais com alta energia podem convergir para esse foco, por efeito da dissipação; remetendo ao oscilador, a geometria espiralada do final do transiente representa a sua amplitude que pulsa em torno do ciclo-limite até se estabilizar assintoticamente. Já para condições iniciais correspondentes a pontos das camadas caóticas do caso hamiltoniano, a duração do transiente tende a ser mais longa, podendo envolver um *transiente caótico*, mas a trajetória acaba por convergir para um dos atratores coexistentes. Existem conjuntos de condições iniciais que não convergem para nenhum dos atratores, mas têm medida de Lebesgue nula e constituem as *fronteiras de bacia* [Feudel *et al.* 98], sobre as quais estão situadas *selas periódicas*, remanescentes dos pontos hiperbólicos que conectam ilhas adjacentes no caso hamiltoniano.

Partindo do caso explorado acima, pode-se pesquisar o efeito de alterações contínuas nos valores de parâmetros, traçando *diagramas de bifurcações*. O acompanhamento das diferentes órbitas para este traçado requer alguns cuidados: o diagrama de bifurcações é, realmente, a fonte principal de informações sobre o comportamento qualitativo da dinâmica do sistema. Contudo, no caso existe multiestabilidade. Um único programa computacional, que oferecesse como saída todas as órbitas coexistentes, exigiria uma fina varredura de

condições iniciais para cada valor do parâmetro de controle, o que aumentaria demasiadamente o tempo de processamento, inviabilizando a pesquisa. Nesse sentido, foi idealizada uma estratégia que articula dois programas diferentes: inicia-se com um conjunto arbitrário de valores de parâmetros; no caso, o exemplo de referência. Usando um programa para bacias de atração, é obtido o número de atratores que coexistem para estes parâmetros, bem como as coordenadas de todos os pontos fixos estáveis do mapa estroboscópico. Escolhe-se então qual o parâmetro de controle e entra-se num programa para o diagrama de bifurcações, construído separadamente para valores maiores e menores do que o valor inicial do parâmetro, e isso para cada uma das órbitas coexistentes. É importante o uso da técnica de *continuidade de órbita*, explicada na seção (4.1), para evitar que a migração das fronteiras de bacia faça com que se perca a pista da órbita periódica. Dessa forma, as janelas de existência de todos os atratores relevantes podem ser identificadas. É conveniente, para valores de parâmetros muito afastados do inicial, reinvestigar esporadicamente as bacias de atração, pois podem aparecer novos intervalos de existência de órbitas periódicas diferentes. Assim, foi sondado primeiramente o comportamento do espaço de fase para algumas alterações nos parâmetros do sistema, e foi obtida a configuração das bacias de atração, com resolução moderada. Dispondo-se das bacias de atração, pode-se então inicializar cada órbita de um caso multiestável para o diagrama de bifurcações.

Tendo como base as considerações físicas listadas na seção (3.1), foram levantados casos que resultaram em *diversos números* de atratores, com *períodos* iguais ou diferentes, porém apresentando estruturas de bacia *sempre semelhantes*. Como ilustração, oito desses casos foram selecionados e agrupados com o exemplo de referência, na figura 3.13.

A figura 3.13 [e] é uma reprodução da figura 3.12. Em [a], a frequência da excitação foi reduzida para $\omega = 1$. São observados *três* estados assintóticos, todos eles correspondentes a *respostas harmônicas*; uma das fronteiras de bacia apresenta-se mais suave, a outra com estrutura mais complexa.

Com o pequeno aumento para $\omega = 2$, em [b] verifica-se uma configuração equivalente à de [a], mas indicando a *duplicação de período* para uma das respostas.

Para uma frequência maior que a de [e], em [c] revela-se uma estrutura com *quatro* estados assintóticos, com períodos 1, 2, 3 e 4; nota-se que a inserção da nova bacia gera fronteiras com estrutura mais complexa.

Em [d] o amortecimento foi reduzido para $\delta = 0,001$, revelando um *maior número de atratores*; além disso, os canais que desembocam nos centros de bacia se apresentam *extremamente delgados*, o que torna o estado final da trajetória *mais fortemente dependente* da condição inicial.

Em [f] a perturbação causada pela excitação foi aumentada para $B = 1$, mostrando uma pronunciada dilatação da bacia correspondente à resposta de período 3 e o surgimento de duas novas respostas sub-harmônicas.

A sequência [g], [h], [i] mostra o aparecimento de um estado caótico: a não-linearidade foi ressaltada, aumentando a elasticidade dos tirantes para $k = 50$ (e o amortecimento foi aumentado para $\delta = 0,05$, por razões referentes à crise de fronteira, que ficam claras no capítulo (5)). Com o aumento progressivo da perturbação devida à excitação de $B = 1,3$ para $B = 2,6$, percebe-se que o período da resposta harmônica foi multiplicado por quatro,

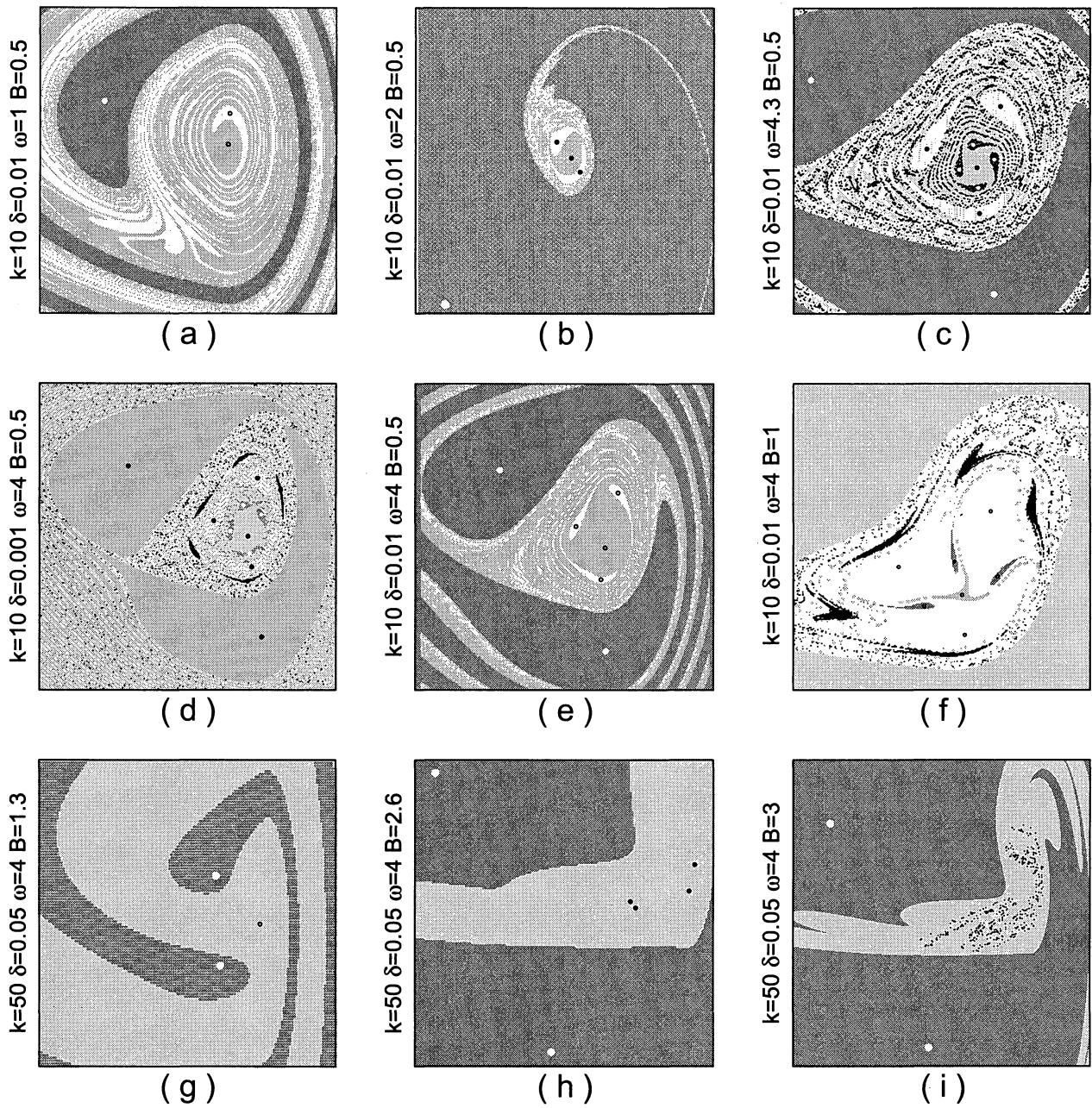


Figura 3.13: Levantamento das bacias de atração para diversas alterações de parâmetro. O caso de referência é o da figura 3.12, reproduzido em [e]. Note-se as nuances de estrutura reveladas em cada caso.

provavelmente devido a duas duplicações de período consecutivas; o aumento seguinte para $B = 3,0$ revela o aparecimento de um atrator caótico. Tal resultado concorda com as previsões listadas no final da seção (3.2.4).

Dois entre os casos obtidos na figura 3.13 foram selecionados como base para investigar mais especificamente o comportamento dinâmico do sistema. O caso [c], devido ao número considerável de atratores, no espaço de fase mais claramente organizado, e com diferentes períodos, se mostra apropriado para levantar a geometria das fronteiras de bacia; por outro lado, como será visto, os intervalos de existência de suas órbitas se mostram contidos um dentro do outro, em ordem decrescente de período, o que torna mais imediata a sua identificação nos diagramas de bifurcação; toda esta análise está desenvolvida no capítulo (4). E o caso [i] foi escolhido para explorar aspectos da dinâmica caótica, no capítulo (5).

Encerrando este capítulo que trata da investigação numérica do sistema, é apresentado um quadro-resumo dos resultados obtidos nesta seção, referente à introdução gradual dos parâmetros. As duas últimas colunas do quadro mostram os casos escolhidos como base para os capítulos (4) e (5). O quadro fornece um panorama da dinâmica do oscilador linear por partes que modela a ponte pênsil, evidenciando o papel que cada um dos parâmetros desempenha no seu comportamento.

3.3 Quadro-resumo dos resultados da investigação

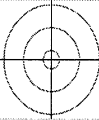
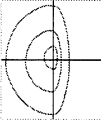
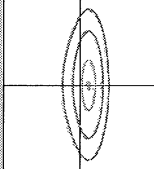
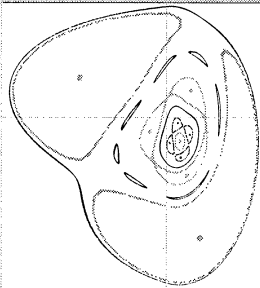
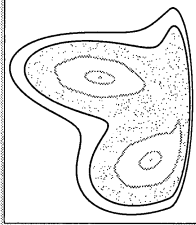
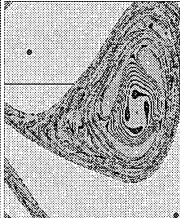

$\delta = 0$ (hamiltoniano)				$\delta > 0$ (dissipativo)		
$B = 0$ (livre)			$B > 0$ (forçado)			
$W = 0$ (sem carregamento)		$W > 0$ (com carregamento)				
$k = 0$ (linear)		$k > 0$ (não - linear)				
* círculos con - cêntricos (O.H.S.)	* semi - círculos $p / y_1 < 0$	*arcos de círculo $p / y_1 < 0$	<i>baixo k</i> <i>baixo B</i>	<i>alto k</i> <i>alto B</i>	<i>baixo k</i> <i>baixo B</i>	<i>alto k</i> <i>alto B</i>
	* semi - elipses $p / y_1 > 0$	*arcos de elipse $p / y_1 > 0$	* toros destruídos * cadeias de ilhas	*toros destruídos * caos hamiltoniano	* multi - estabilidade	* coexistência : atrator caótico + período 2
						

Figura 3.14: Resumo dos resultados obtidos na seção precedente deste capítulo, em termos de retratos de fase, seções de Poincaré ou bacias de atração. Fica esclarecido o papel dos diferentes parâmetros na dinâmica do oscilador em estudo.

Capítulo 4

Multiestabilidade: bifurcações, fronteiras de bacia e expoente de incerteza

4.1 Intervalos de existência das órbitas estáveis

No capítulo (3), foram introduzidos todos os parâmetros para a simulação numérica do oscilador linear por partes, carregado, amortecido e forçado, e alguns casos específicos se mostraram adequados para se aprofundar em aspectos dinâmicos do sistema. O caso da figura 3.13 [c], por exemplo, é tomado como base para todo este capítulo.

Em primeiro lugar, pode-se testar o *intervalo de existência* para cada solução assintoticamente estável revelada na referida figura. Para tanto, fixa-se todos os parâmetros, com exceção de um. Este parâmetro é então alterado em pequenos passos, até que se chegue a um valor para o qual a bacia de atração deixa de existir, fazendo a condição inicial convergir para um atrator alternativo. Quanto à condição inicial, *não* é conveniente manter o seu valor *fixo* ao longo desse processo, pois a alteração *do parâmetro* pode deslocar gradualmente o atrator no espaço de fase, juntamente com sua bacia, até que aquela condição inicial acabe caindo fora da fronteira; isso forneceria um valor enganoso para o parâmetro-limite, conforme é explicado no esquema da figura 4.1 (a). Isto posto, adota-se a técnica chamada *continuidade de órbita*, que consiste em tomar como condição inicial, a cada passo da variação do parâmetro, as coordenadas do *estado final do passo precedente*; assim, enquanto o atrator existe, a condição inicial está sempre *próxima* dele e afastada da fronteira da bacia: quando se verifica o salto para outro atrator, pode-se afirmar que foi atingido o parâmetro-limite, conforme o esquema da figura 4.1 (b).

Uma alternativa interessante para iniciar o estudo da multiestabilidade, para o oscilador linear por partes que modela a dinâmica da ponte pênsil estimulada pelo vento, é pesquisar o número de órbitas periódicas estáveis variando com a dissipação. A figura 4.2 mostra, no eixo horizontal, o coeficiente de amortecimento δ e, no vertical, a posição y_1 para os pontos assintóticos do mapa estroboscópico. Os demais parâmetros foram fixados conforme o caso [c] da figura 3.13, que apareceria na figura 4.2 em uma linha vertical para $\delta = 0,01$.

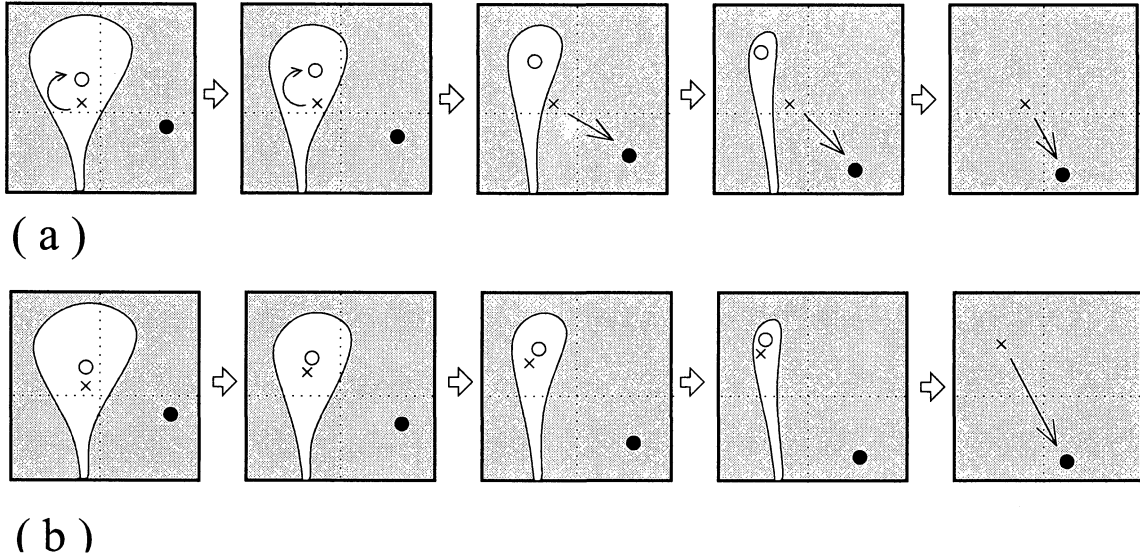


Figura 4.1: As duas seqüências mostram a diferença em ser ou não adotada, para o traçado do diagrama de bifurcações, a técnica de continuidade de órbita. Em (a) as coordenadas da condição inicial (\times) não são alteradas ao longo dos passos; assim, é o deslocamento gradual da fronteira da bacia da órbita (\circ) que faz a condição inicial convergir para a órbita alternativa (\bullet), e isso leva a um resultado enganoso para o intervalo de existência da órbita. Em (b) é tomado, como condição inicial de cada passo (\times), o estado final do passo precedente (\circ); então a condição inicial só converge para o estado final alternativo (\bullet) quando a órbita (\circ) deixa realmente de existir.

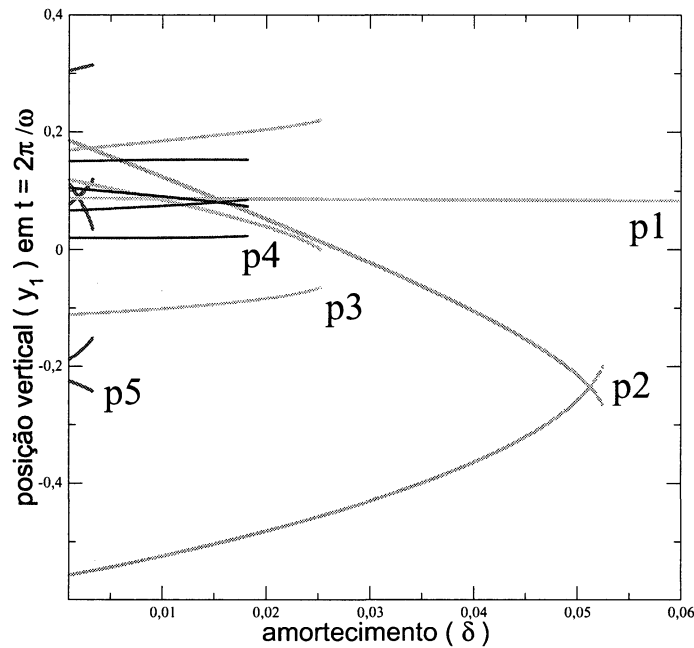


Figura 4.2: Órbitas periódicas coexistentes diminuem em período e em número à medida que a dissipação de energia é calibrada mais intensamente. Para valores próximos de zero, o número tende a infinito.

Na figura 4.2, para valores de δ inferiores a 0,005, são observadas diferentes órbitas, com períodos de 1 a 5; à medida que δ é aumentado, as órbitas de períodos mais altos vão desaparecendo, até restar unicamente o atrator de período 1, o que está de acordo com o previsto na seção 3.1. Para δ muito pequeno, espera-se um número ainda maior e crescente de órbitas coexistentes, incluindo períodos mais altos (e também, naturalmente, transientes demasiadamente longos, que praticamente inviabilizam a pesquisa computacional). O número de atratores tende ao infinito no limite $\delta = 0$ (sendo então os pontos elípticos mencionados no caso hamiltoniano). Esse comportamento concorda com o previsto para outros sistemas fracamente amortecidos, no tocante ao número de atratores periódicos, que decai com o aumento do coeficiente de amortecimento [Feudel *et al.* 96]. É observado, mesmo em sistemas que exibem mais de 100 atratores, que poucos deles têm períodos elevados, visto que suas bacias tendem a ser delgadas demais para poderem ser detectadas numericamente [Feudel *et al.* 96]; o mesmo vale para atratores caóticos, contudo sendo possível, alternativamente, ser verificada uma dinâmica caótica para trajetórias próximas às fronteiras de bacia, na forma de longos transientes, quando estas têm geometria fractal [Feudel e Grebogi 97].

Cabem aqui algumas considerações de fundo teórico sobre o diagrama de bifurcações obtido na figura 4.2: um comportamento freqüente em sistemas multiestáveis fracamente dissipativos é o desaparecimento de um atrator para um valor bem definido do amortecimento, que se deve à *coalescência*, no plano de fase, de cada foco estável com o correspondente ponto de sela (o esboço na figura 4.3 esclarece o processo, para uma órbita de período m genérica).

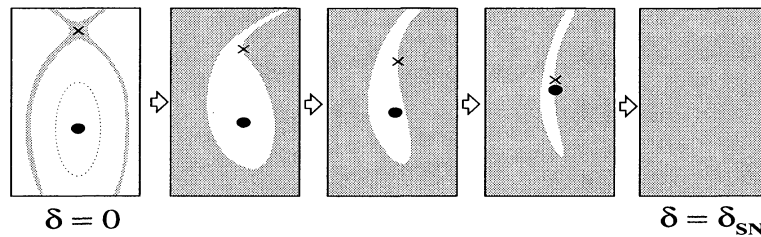


Figura 4.3: *Esboço que esclarece o processo de coalescência entre um foco estável (●) e o correspondente ponto de sela na fronteira da bacia (×). Para o amortecimento fraco, os dois pontos estão consideravelmente afastados, sendo remanescentes dos pontos elíptico e hiperbólico do caso hamiltoniano. Com o amortecimento crescente, os pontos se aproximam até se fundirem num só, implicando no desaparecimento da bacia em $\delta = \delta_{SN}$.*

Na vizinhança do ponto de coalescência no plano de fase, o mapa linearizado tem seus *autovalores* passando exatamente pelo valor +1, o que caracteriza uma *bifurcação* do tipo *tangente*, ou *nó-sela* [Feudel *et al.* 96]. Na figura 4.2 aparecem apenas as órbitas estáveis (por serem diretamente acessíveis pela simulação numérica); mas na figura 4.4 o fenômeno é exemplificado, num diagrama de bifurcações *esquemático*, para a órbita de período 3, cujo intervalo de existência encerra em $\delta = \delta_{SN} \approx 0.025$.

Quanto à configuração geométrica das curvas da figura 4.4, na vizinhança do ponto de bifurcação $\delta = \delta_{SN}$, supõe-se que seja respeitada uma função quadrática de *forma normal*

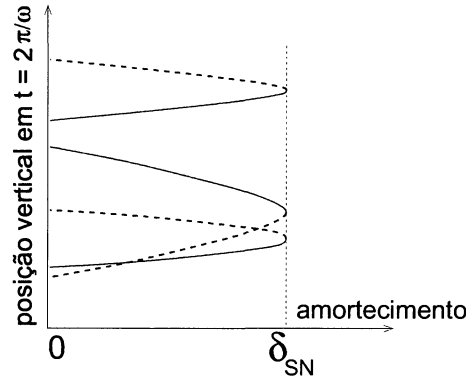


Figura 4.4: Esboço esquemático que mostra uma das órbitas estáveis obtidas numericamente na figura 4.2 (linhas sólidas), coalescendo com a correspondente órbita instável (linhas pontilhadas), numa típica bifurcação tipo nó-sela.

$z \mapsto z + (\delta - \delta_{SN}) + z^2$, com $z = y - y_m^*$, sendo y_m^* um ponto da órbita de período m do mapa estroboscópico [Wiggins 97] (p.358). É razoável esperar que o intervalo de existência de uma dada órbita dependa diretamente do *afastamento*, no espaço de fase, entre o foco estável e o ponto de sela, associado à *largura* dos centros de bacia, que é remanescente da largura das *ilhas* correspondentes no caso hamiltoniano, que por sua vez costuma ser menor para ressonâncias com alto m . Isso reforça o fato de atratores de período mais elevado existirem em intervalos mais curtos no diagrama de bifurcações.

Pode-se explorar ainda o comportamento das múltiplas órbitas, investigando, por exemplo, seus intervalos de existência na *frequência da excitação* ω , sendo agora mantidos constantes o amortecimento e os demais parâmetros. O resultado aparece na figura 4.5.

Na figura 4.5, o número de atratores coexistentes vai diminuindo, tanto para frequências mais altas como mais baixas que a do caso da figura 3.13 [c]. Assim como no diagrama precedente, a cada órbita estável que aparece na figura 4.5 corresponde uma órbita instável de mesmo período. O nascimento desses pares estável/instável se deve a bifurcações nó-sela, tais como as explicadas para a figura 4.2; da mesma forma, a extensão do intervalo de existência está associada à largura da bacia.

No que diz respeito ao estado final, portanto, a dinâmica do oscilador linear por partes amortecido e forçado é *dominada* pelos atratores de menor período. Uma vez inicializado, o sistema descreve um comportamento transiente e converge para um dos estados alternativos. Para a determinação desse estado a partir das condições iniciais, é importante o estudo das *fronteiras de bacia*, abordado na seção seguinte.

4.2 Geometria das fronteiras de bacia

4.2.1 Colocações preliminares

A estrutura geral do plano de fase nos casos apresentados na figura 3.13 mostra-se bastante semelhante à do oscilador de Duffing forçado [Zavodney *et al.* 90]. Nesta seção, é conduzido um estudo pormenorizado da geometria das fronteiras de bacia e de algumas

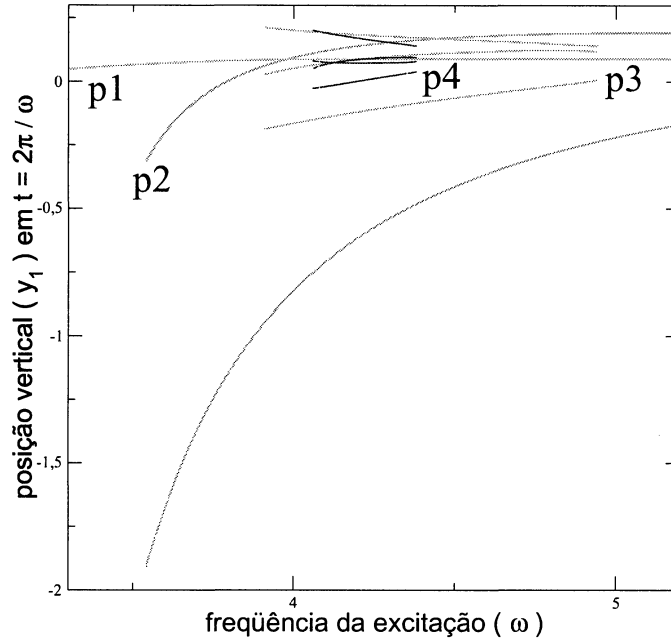


Figura 4.5: Órbitas periódicas coexistem em um número maior dentro de um curto intervalo na frequência de excitação.

entre suas implicações dinâmicas, tendo sido escolhido o caso [c] daquela figura. Para tanto, é interessante aumentar a resolução do referido gráfico; o resultado está na figura 4.6.

De acordo com o que foi antecipado no capítulo (3), as bacias de atração das órbitas sub-harmônicas coexistentes exibem uma configuração recorrente: *centros* de bacia em torno dos m focos estáveis, que lembram lagos, alimentados pelos *canais* que espiralam se afastando da origem do plano de fase. Essa geometria espiralada mostra dobras sucessivas, em maior número para os atratores de períodos elevados. Essas dobras se devem justamente à presença das outras bacias e dos seus respectivos canais, que restringem a porção acessível do plano de fase. No presente caso, os sucessivos dobramentos resultam numa configuração emaranhada para as fronteiras de bacia, que contudo *não apresentam* geometria fractal. Esse é um exemplo de estrutura *aparentemente* auto-similar, causada pela *acumulação logarítmica* de *bandas* da bacia de um atrator contra um ponto de sela correspondente a outro atrator. Para esclarecer devidamente esta distinção, deve-se reintroduzir os conceitos acima segundo uma descrição mais rigorosa, em termos de *variedades* estável e instável. As subseções seguintes procuram expor de forma pormenorizada essa descrição.

4.2.2 Dinâmica na vizinhança do ponto de sela

Conforme já explicado na seção (4.1), uma das características desse sistema, devido à fraca dissipação, é a presença de múltiplos atratores (focos estáveis), ficando assim o plano de fase dividido em bacias de atração. A cada atrator F_m corresponde um ponto de sela S_m , com mesmo período (m), sobre a fronteira entre a sua bacia e a de outro atrator $F_{m'}$.

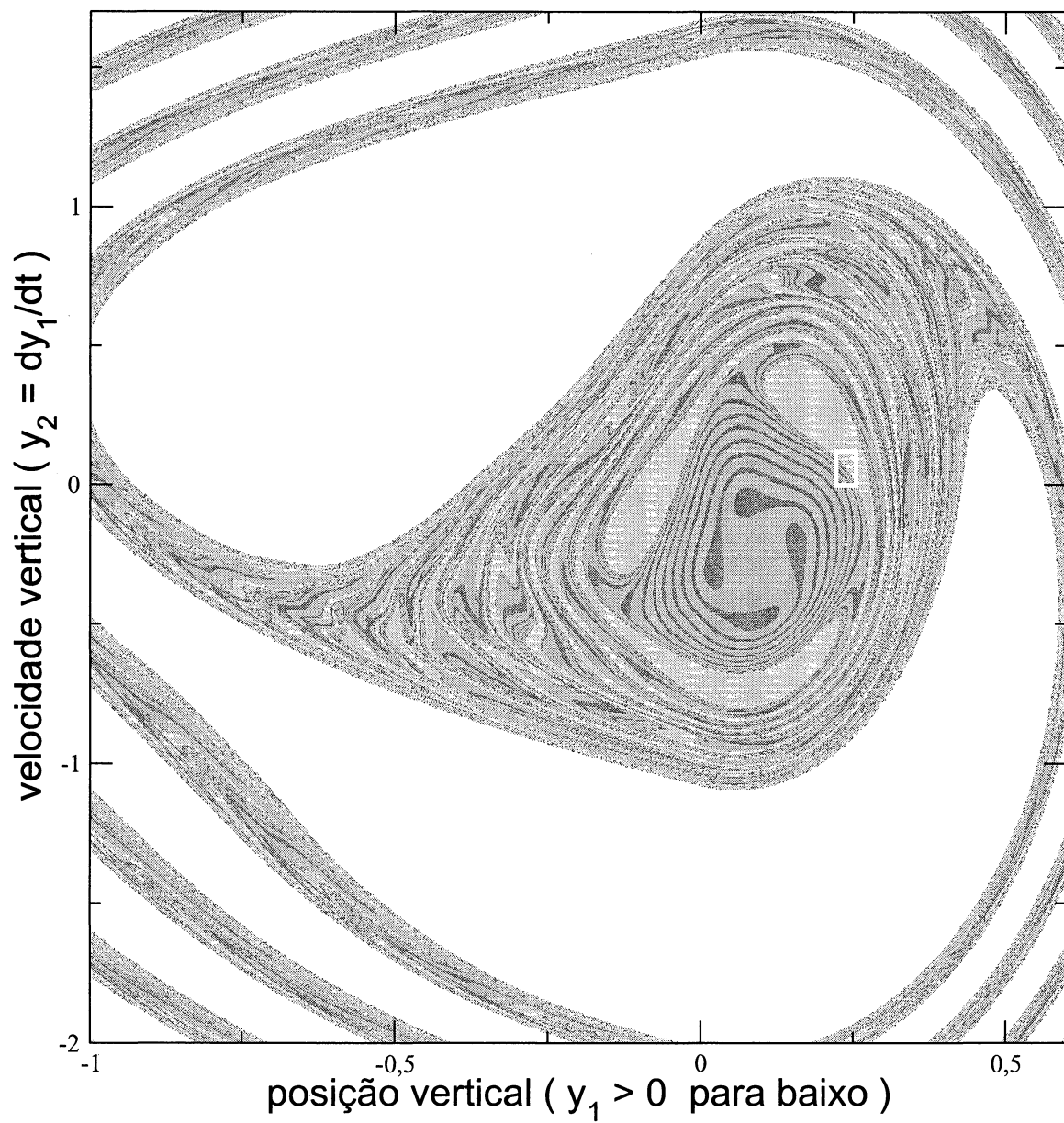


Figura 4.6: A mesma configuração de bacias da figura 3.13 [c], com resolução mais alta. Note-se a estrutura dos canais, com inúmeros dobramentos.

Para visualização da dinâmica na vizinhança imediata de S_m , pode-se criar um minúsculo retângulo denso de condições iniciais, centrado em S_m , e simular numericamente *apenas a primeira iteração* de todos esses pontos com o mapa estroboscópico de m -ésimo retorno, no sentido direto da evolução temporal e também no sentido inverso (pois o mapa em estudo é inversível, posto que se trata de um mapa de Poincaré).

As iterações *inversas* (ou *pré-imagens*) dos pontos do referido retângulo caem sobre pontos contíguos aos dois ramos da *variedade estável* W^s da sela S_m . Esses ramos constituem um *conjunto invariante*, ou seja, pontos pertencentes a essa linha são mapeados, por m iterações, sempre sobre a própria linha, no caso, se aproximando assintoticamente de S_m para $t \rightarrow \infty$ e, para $t \rightarrow -\infty$, se afastando da origem do plano de fase e formando os canais redobrados, visto que o *fechamento* desse conjunto é a própria fronteira entre as bacias de F_m e $F_{m'}$ (figura 4.7 [a]).

Quanto às iterações *diretas* (ou *imagens*), caem em pontos contíguos aos dois ramos da *variedade instável* W^u , que constituem outro conjunto invariante, no caso consistindo em curvas espiraladas sem dobramentos, que se aproximam assintoticamente dos focos F_m e $F_{m'}$ das duas diferentes bacias para $t \rightarrow \infty$, e de S_m para $t \rightarrow -\infty$ (figura 4.7 [b]).

Assim, as variedades podem ser traçadas mediante simulação numérica, desde que se disponha, como pré-requisito, da localização precisa do ponto de sela S_m ; o acesso numérico a pontos fixos instáveis não é trivial, e existem algoritmos otimizados para esse fim. No caso, uma primeira aproximação foi obtida com o uso do pacote DYNAMICS II [Nusse e Yorke 97], sendo em seguida conduzida até a precisão desejada, por um método envolvendo tentativa e erro. O resultado da simulação numérica que mostra a configuração das variedades associadas ao ponto de sela S_3 para o exemplo estudado é apresentado na figura 4.7 [c] (o retângulo de condições iniciais não é distingüível no gráfico, pois deve ser suficientemente pequeno para que o traçado do trecho das variedades esteja ainda nas imediações da sela).

A dinâmica descrita nos parágrafos acima é regida quantitativamente pelos dois *autovalores* λ_s e λ_u da *matriz jacobiana* associada ao mapa estroboscópico de m -ésimo retorno, linearizado na vizinhança da sela S_m . Os respectivos *autovetores* \mathbf{e}_s e \mathbf{e}_u definem os *sub-espacos* E^s e E^u . Nessa região restrita do plano de fase para o oscilador em estudo, os sub-espacos estável e instável são *retas* que se interceptam no ponto de sela S_m . Essas retas são tangentes, exatamente no ponto de sela, às curvas que constituem as duas *variedades* W^s e W^u [Wiggins 97] (p.14).

4.2.3 Causa da acumulação das bandas de bacia

Partindo dos conceitos introduzidos acima, pode ser melhor compreendido o cenário em que ocorre a *acumulação logarítmica*: sabe-se que o ponto de sela S_m está situado sobre a fronteira entre as bacias dos focos F_m e $F_{m'}$. Suponha-se agora que, inserida na bacia de $F_{m'}$, exista uma *terceira bacia* de um foco $F_{m''}$. Isso implica em uma nova sela $S_{m''}$ na nova fronteira, cuja variedade *estável* forma novos canais espiralados, que também se afastam da origem do plano de fase. Mas a presença da bacia de F_m bloqueia a expansão destes canais, fazendo com que se disponham num número infinito de *bandas de acumulação* contra o ponto de sela S_m . A situação é exemplificada na figura 4.8, que esquematiza parte da

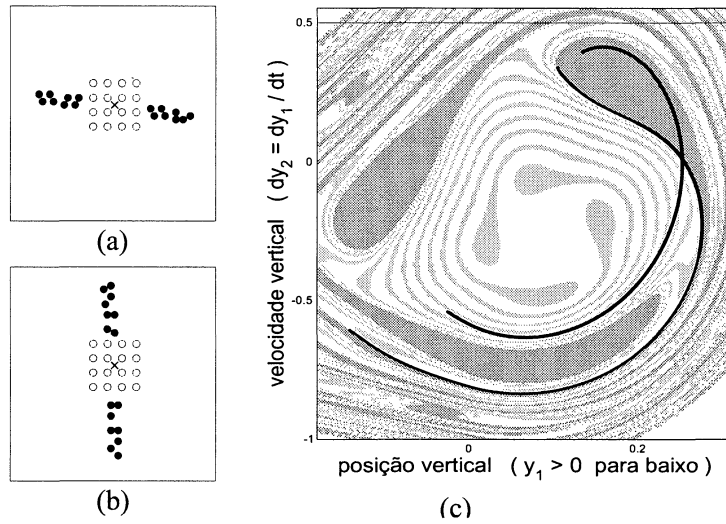


Figura 4.7: Traçado das variedades de um ponto de sela S_3 (\times) com o mapeamento de um pequeno retângulo denso de condições iniciais (\circ). A primeira iteração do mapeamento estroboscópico inverso (esquemático em (a)) fornece pontos contíguos à variedade estável (\bullet); analogamente, para obter a variedade instável, basta fazer o mapeamento direto (esquemático em (b)). O resultado numérico do traçado é mostrado em (c).

configuração do espaço de fase para o exemplo estudado, sendo no caso $m = 3$, $m' = 1$ e $m'' = 4$ (para não carregar demais o desenho, a bacia de $F_{m''}$ está representada por apenas um de seus m'' centros, e analogamente para a bacia de F_m ; a intenção aqui é explicar, de uma forma razoavelmente clara, a formação da estrutura geométrica que causa a falsa impressão de fractalidade).

Dispõe-se de um argumento convincente para se afirmar que as fronteiras de bacia neste exemplo não são realmente fractais. Basta observar um ponto de sela S_m sobre a fronteira. Quando esta é fractal, são verificadas *interseções* entre as variedades instável e estável conectadas à mesma sela S_m [Nusse e Yorke 96b]. No caso estudado, conforme esquematizado na figura 4.8, um dos ramos da variedade instável de S_3 espirala diretamente para F_3 , sem interceptar a variedade estável de S_3 . O outro ramo espirala rumo ao atrator F_1 , só interceptando em seu caminho os ramos da variedade estável de *outro* ponto de sela (S_4). A ausência de *cruzamentos homoclínicos* assegura que a fronteira de bacia tem, na realidade, *dimensão inteira*.

Para confronto com o caso em estudo, a figura 4.9 mostra um exemplo de outro sistema dinâmico, que exhibe bacias de atração com fronteiras autenticamente fractais. Trata-se de um caso multiestável para o *pêndulo amortecido e forçado*. O mapa estroboscópico mostra três atratores periódicos, cujas bacias se distribuem como estrias justapostas, em escalas arbitrariamente finas, distinguindo-se da acumulação de bandas localizada, esquematizada na figura 4.8, que dá origem à estrutura da figura 4.6. Aparecem destacados os primeiros trechos das variedades instável e estável de um ponto de sela sobre a fronteira, evidenciando a existência dos cruzamentos homoclínicos, que não são verificados no oscilador linear por partes que modela a ponte pênsil.

Para explicar a existência dos dobramentos sucessivos dos canais conectados aos cen-

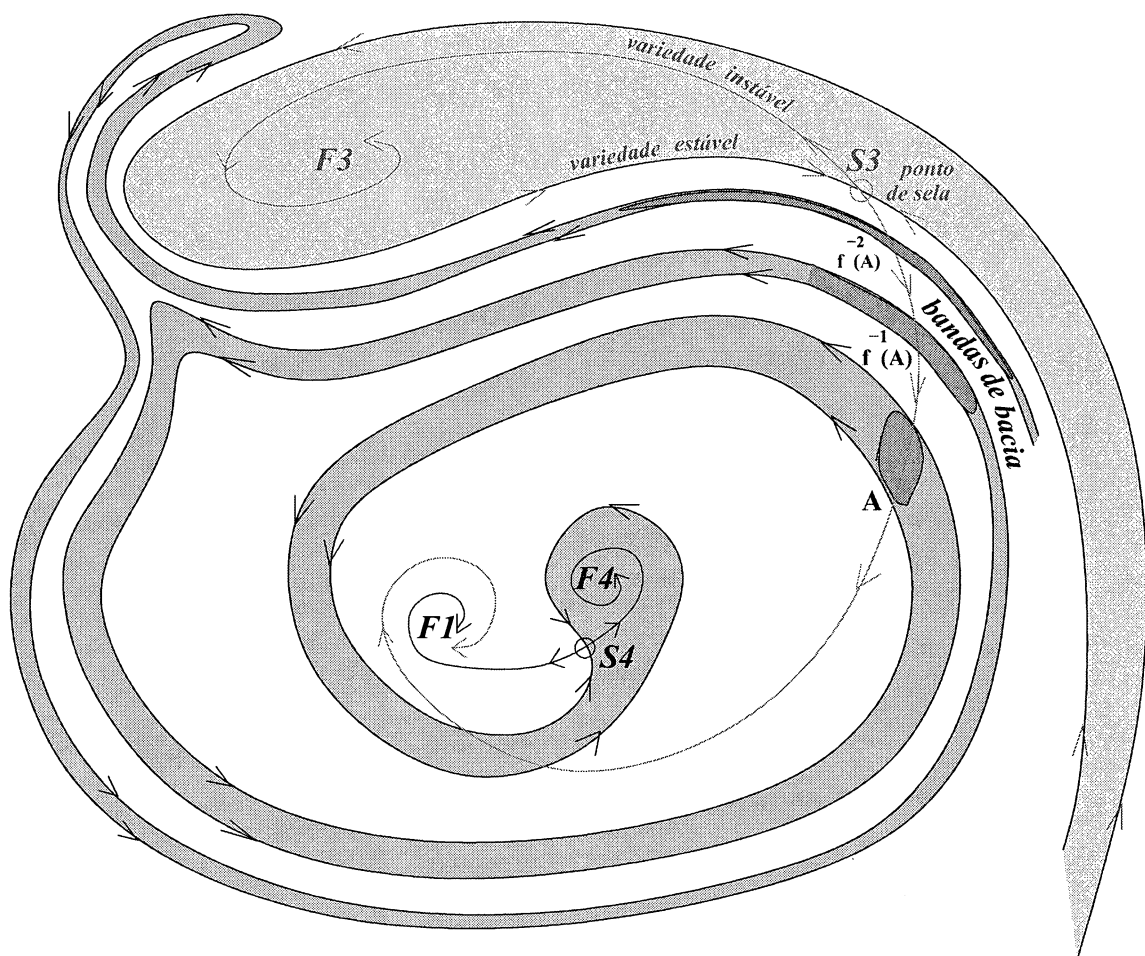


Figura 4.8: Esquema mostrando a acumulação de bandas de bacia, devida à geometria das variedades dos pontos de sela S_3 e S_4 , referentes à figura 4.6. Os ramos estáveis constituem as fronteiras de bacia; os ramos instáveis convergem espiralando para os diferentes focos. Na figura, aparece em destaque um conjunto de área A sobre uma banda de bacia do foco F_4 , cujas pré-imagens $f^{-r}(A)$ se acumulam logaritmicamente contra o ponto de sela S_3 , estirando-se e redobrando-se, e criando a falsa impressão de uma estrutura fractal.

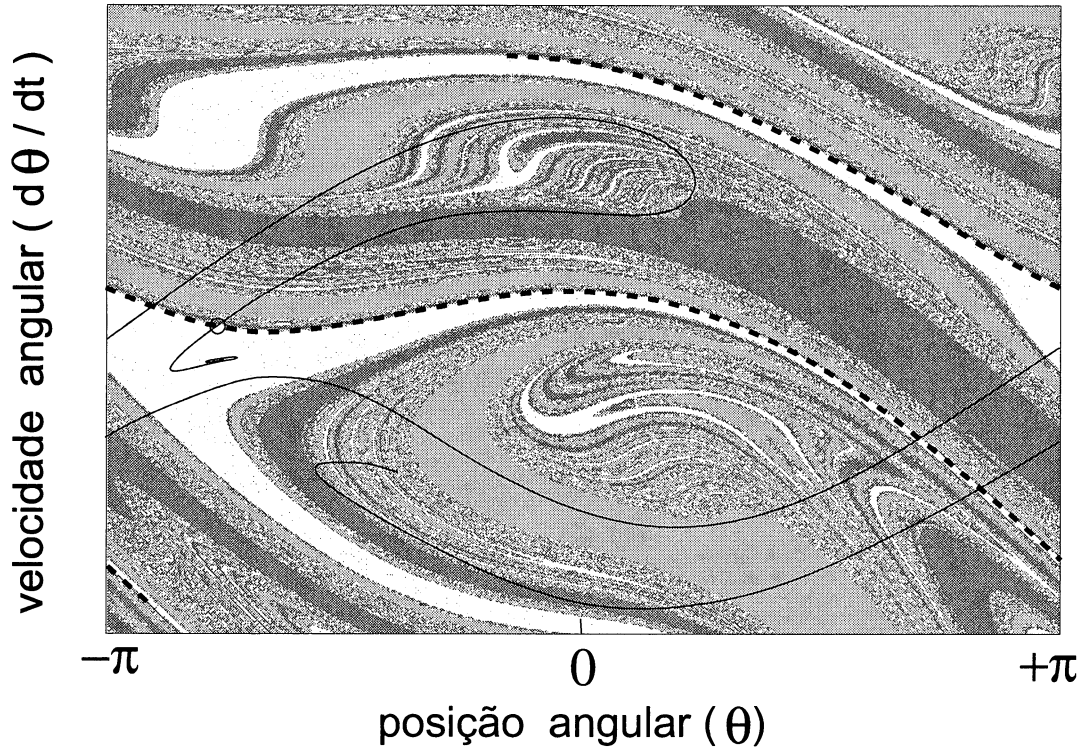


Figura 4.9: *Bacias de atração fractais em um exemplo de multiestabilidade para o pêndulo não-linear amortecido e forçado, regido pela equação diferencial $\ddot{\theta} = (-0,2)\dot{\theta} - \text{sen}\theta + (1,66)\text{sen}(t)$. Note-se a distinção entre as fronteiras neste sistema e no estudado neste trabalho, pelas figuras 4.6 e 4.7. A variedade instável de um ponto de sela (linha sólida) tem um de seus ramos convergindo para um foco estável, e o outro cruzando inúmeras vezes a variedade estável (linha tracejada), cujo fechamento é a própria fronteira da bacia (as curvas são ligadas em $\theta = +\pi$ e $\theta = -\pi$).*

tros de bacia na figura 4.6, a atenção deve ser focalizada sobre um segmento com área A destacado no canal da bacia do atrator F_4 , na figura 4.8: tome-se as iterações *inversas* do conjunto A . O conjunto escolhido é interceptado pela variedade instável de S_3 ; levando em consideração que a variedade é um conjunto invariante, é válido afirmar que as imagens e pré-imagens de A também são interceptadas por ela.

Como o sistema em estudo é *dissipativo*, as *imagens* sucessivas de toda a região A (no caso, para o mapa de *quarto* retorno) vão sendo iteradas nos conjuntos $f^1(A)$, $f^2(A)$, ..., $f^r(A)$, com áreas cada vez *menores*, tendendo para uma vizinhança infinitesimal próxima do foco estável F_4 (e aí permanecendo para $r \rightarrow \infty$).

Já as *pré-imagens* de A são iteradas, pelo mapeamento inverso, na forma das *bandas* $f^{-1}(A)$, $f^{-2}(A)$, ..., $f^{-r}(A)$, tendo áreas cada vez *maiores*. A barreira imposta pela bacia de F_3 restringe a *largura* das bandas, as quais, para que seja respeitado o aumento na área, devem ficar progressivamente mais *estiradas* à medida que se aproximam assintoticamente da sela S_3 . Mas o fato de os canais da bacia de F_4 estarem *confinados* dentro dos canais da bacia de F_1 faz com que o estiramento das bandas implique em sucessivas *dobras*, formando uma estrutura de filamentos extremamente finos ao longo de toda a variedade estável de S_3 [Pentek *et al.* 95]. Isso explica a aparência entrelaçada das fronteiras de bacia. A configuração revelada na figura 4.6 fica assim justificada, desde que o fenômeno descrito acima seja extrapolado para um desenho equivalente, no qual estivessem representados *todos* os centros de bacia existentes no espaço de fase.

A geometria das fronteiras de bacia, decorrente da acumulação logarítmica, dá margem a implicações dinâmicas passíveis de serem exploradas numericamente. O oscilador linear por partes, uma vez inicializado, pode convergir para diferentes estados periódicos alternativos. Assim, a previsibilidade quanto ao estado final está associada à incerteza na condição inicial, e também à *estrutura das fronteiras de bacia*. Essa previsibilidade pode ser significativamente obstruída no caso de fronteiras intrincadas: a situação se agrava à medida que a *dimensão fractal* do conjunto seja mais alta. No exemplo aqui estudado, a geometria não é, na realidade, fractal, tendo dimensão *inteira*, o que é demonstrado pela ausência de cruzamentos homoclínicos. Contudo pode ser verificado, por simulação numérica, que o sistema *apresenta* obstrução à previsibilidade, como se a dimensão das fronteiras fosse fracionária. Nas subseções que seguem, em primeiro lugar é apresentado o resultado dessa simulação; em seguida, por um desenvolvimento algébrico, é explicado *porque* a acumulação de bandas implica, para fins de previsibilidade, numa lei matemática equivalente à de um conjunto fractal.

4.2.4 Expoente de incerteza para a região de acumulação

A obstrução à previsibilidade em um sistema multiestável pode ser investigada quantitativamente, obtendo-se um *expoente de incerteza* α , o qual caracteriza uma lei de potência [McDonald *et al.* 85a]. Essa lei retrata o efeito que uma variação do valor da *incerteza* ε na condição inicial exerce sobre a *fração do espaço de fase* $f(\varepsilon)$ na qual o estado final fica *indeterminado*. A figura 4.10 esquematiza esse comportamento. O intervalo de variação do expoente de incerteza é, tipicamente, $0,0 < \alpha < 1,0$: quanto *mais intrincada* for a geometria da fronteira de bacia, *menor* é o valor de α .

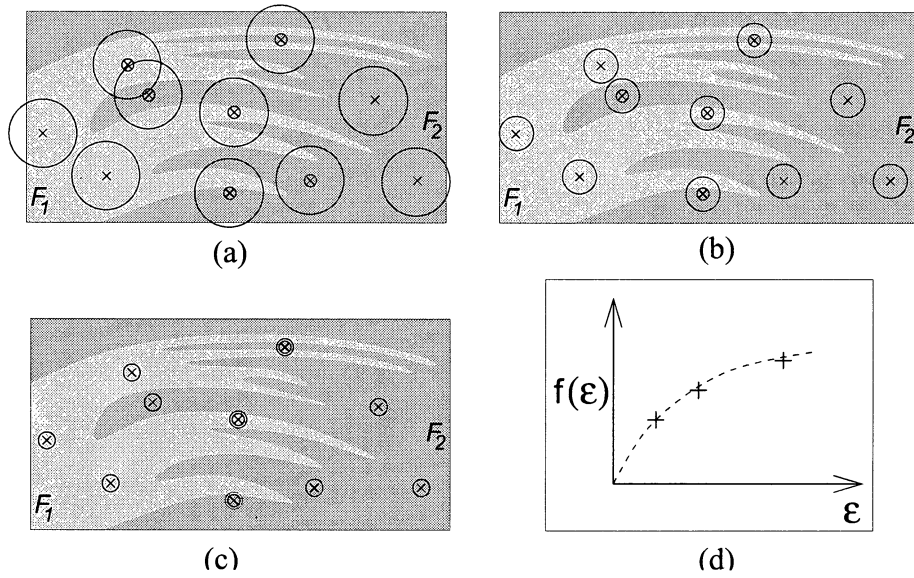


Figura 4.10: Esquema ilustrando o efeito que a variação da incerteza ϵ na condição inicial exerce sobre a fração do plano de fase na qual o estado final do sistema fica indeterminado. No exemplo, $N = 10$ pontos são escolhidos aleatoriamente como condições iniciais. Se a circunferência de raio ϵ , centrada no ponto, cruza uma fronteira de bacia, o ponto pertence à fração incerta $f(\epsilon)$ da área do plano de fase. Em (a), (b) e (c), o valor de ϵ é diminuído progressivamente, causando uma diminuição em $f(\epsilon)$ que respeita a lei de potência $f(\epsilon) = \epsilon^\alpha$, mostrada em (d), sendo α o expoente de incerteza, tipicamente menor do que 1,0.

Nesse contexto, é adotada uma região do espaço de fase para o oscilador linear por partes que modela a ponte pênsil, com os parâmetros do caso estudado neste capítulo. A região escolhida é justamente a vizinhança da sela S_3 na qual se verifica a acumulação logarítmica, indicada com um contorno branco na figura 4.6. Antes de dar início ao levantamento numérico do expoente de incerteza para esta situação, é interessante observar, na figura 4.11, uma ampliação desse pequeno intervalo, tendo sido novamente aumentada a resolução.

Suponha-se uma determinada condição inicial $(y_0 \pm \epsilon, \dot{y}_0 \pm \epsilon)$, com uma órbita do mapa estroboscópico inicializada exatamente em (y_0, \dot{y}_0) convergindo para o atrator F_m . Como esta condição inicial é determinada a menos de uma incerteza ϵ , deve ser representada no plano de fase por um círculo de raio ϵ centrado em (y_0, \dot{y}_0) . Se agora for inicializada outra órbita, tomando como condição inicial um ponto escolhido aleatoriamente dentro do mesmo círculo, pode-se obter informação sobre a previsibilidade quanto ao estado final para o ponto (y_0, \dot{y}_0) do plano de fase: se a nova órbita convergir para um atrator distinto $F_{m'}$, o centro (y_0, \dot{y}_0) do círculo é dito um ponto ϵ -incerto [McDonald et al. 85a], e isso indica que a circunferência de raio ϵ está cruzando a fronteira entre as bacias de F_m e de $F_{m'}$.

O conjunto de todos os pontos ϵ -incertos constitui a fração incerta da área do plano de fase. Para obter o valor dessa fração, para um dado ϵ , pode-se repetir o procedimento descrito no parágrafo acima para um número N de centros de círculo (y_0, \dot{y}_0) , também

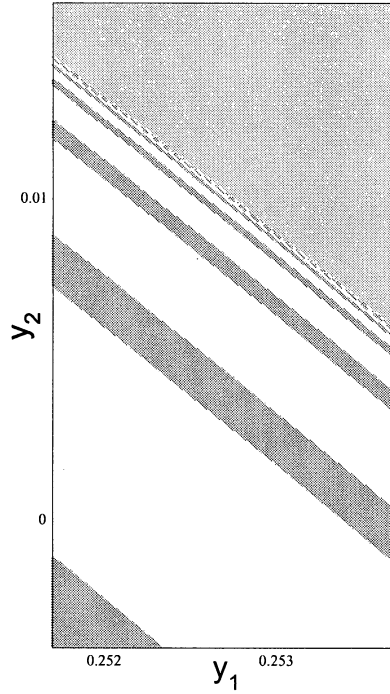


Figura 4.11: Ampliação do pequeno retângulo indicado na figura 4.6, sendo distinguíveis três bacias de atração. Essa região, na vizinhança do ponto de sela S_3 , foi escolhida para o levantamento numérico do expoente de incerteza.

escolhidos aleatoriamente, no interior da região estudada. Sendo N_u o número de pontos ε -incertos computados, é razoável supor, para N significativamente alto, que a porcentagem N_u/N seja uma boa estimativa para $f(\varepsilon)$ [McDonald *et al.* 85a].

A maneira como $f(\varepsilon)$ escala com ε quantifica a obstrução à previsibilidade. No exemplo estudado, foram gerados, com o auxílio de uma rotina para números pseudo-aleatórios, $N = 2048$ centros de círculo na janela da figura 4.11. Em seguida, foram selecionados 8 diferentes valores de ε . Para cada um deles, foi obtido um valor de $f(\varepsilon)$ de acordo com o procedimento descrito no parágrafo acima. Os resultados aparecem na figura 4.12.

O gráfico mostrado na figura 4.12 fornece para o expoente de incerteza o valor $\alpha = 0,8807 \pm 0,0085$. O resultado fracionário obtido é, aparentemente, paradoxal. Como foi observado anteriormente, as variedades da sela S_3 *não apresentam* cruzamentos homoclínicos, e portanto a fronteira de bacia não tem geometria fractal, ou seja, sua *dimensão por contagem de caixas* deve ser um número *inteiro* (no caso, $d = 1$). O expoente de incerteza α está relacionado a essa dimensão d pela expressão $\alpha = D - d$, sendo D a dimensão do espaço de fase [McDonald *et al.* 85a]. No caso, como $D = 2$, o resultado $\alpha \approx 0,88$ fornece o valor $d \approx 1,12$ para a dimensão da fronteira, induzindo assim uma conclusão enganosa sobre a fractalidade da sua geometria. Na realidade, pode-se mostrar que, para este caso, que envolve o processo de *acumulação logarítmica* descrito na subseção anterior, o comportamento da fração incerta com a variação de ε *imita* uma escala de potência na forma $f(\varepsilon) \approx \varepsilon^\alpha$ para pequenos valores de ε . A subseção seguinte trata de esclarecer esse aspecto particular, causado pela coexistência de diversos atratores periódicos no oscilador

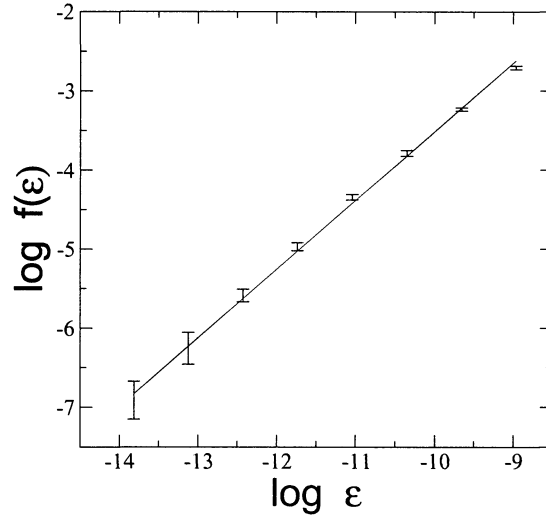


Figura 4.12: *Escala de potência obtida numericamente para a fração incerta do espaço de fase $f(\varepsilon)$ variando com 8 valores da incerteza ε na condição inicial, para a região do plano de fase da figura 4.11. Para cada ε , as 2048 condições iniciais foram testadas em 6 conjuntos, variando suas posições no plano de fase, proporcionando assim as barras de erro. A regressão oferece como resultado $\alpha = 0,8807 \pm 0,0085$.*

linear por partes amortecido e forçado que modela a ponte pênsil.

4.2.5 Falsa escala de potência decorrente da acumulação logarítmica

Parte-se aqui de argumentos básicos concernentes à dinâmica no plano de fase para obter uma expressão analítica aproximada para a *fração incerta* $f(\varepsilon)$, envolvendo nessa abordagem a acumulação das bandas de bacia. Será mostrado que $f(\varepsilon)$, nesse caso, é uma função distinta da lei de potência, mas que, para pequeno ε , se assemelha ao seu comportamento, justificando assim o resultado fracionário obtido numericamente para o expoente de incerteza α na subseção anterior.

Seja, portanto, o retângulo no plano de fase com as bandas de acumulação já reveladas na figura 4.11, agora esquematizado na figura 4.13. Será obtida *analiticamente* uma expressão aproximada que relaciona a fração incerta $f(\varepsilon)$ ao valor da incerteza ε . Em termos de *área*, tem-se $f(\varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)}{vw}$, sendo v e w os intervalos em y e \dot{y} , consistindo no comprimento e na largura do retângulo selecionado do espaço de fase; conforme explicado na seqüência, $A(\varepsilon)$ será expressa levando em consideração as iterações do mapeamento estroboscópico inverso.

A área incerta $A(\varepsilon)$ no retângulo $v \times w$ é a *somatória* de todas as faixas de largura 2ε centradas nas linhas de fronteira. As infinitas faixas que estão *muito próximas* ao ponto de sela S_3 fundem-se em uma *faixa única*, cuja área A_0 é da ordem do produto $2\varepsilon v$. Nesta abordagem, os fatores constantes não são essenciais, então é suficiente escrever $A_0 \sim \varepsilon$. O

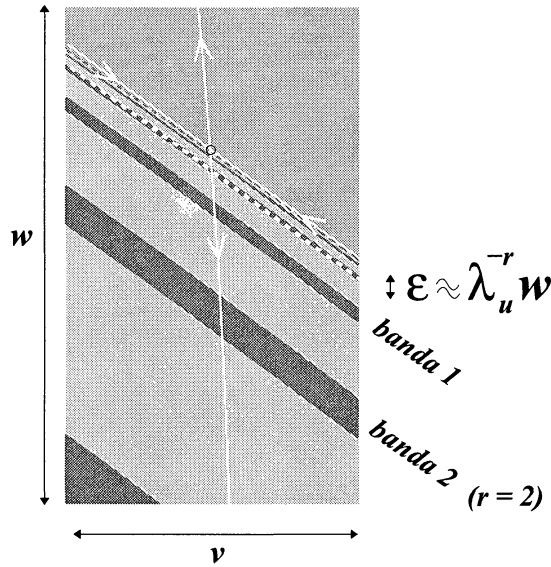


Figura 4.13: Esquema mostrando a fração incerta do plano de fase na região da figura 4.11.

restante da área incerta depende do número r de bandas A_j da bacia do atrator F_4 que estão fora de A_0 mas ainda dentro do retângulo $v \times w$. Assim,

$$A(\varepsilon) = A_0 + rA_j. \quad (4.1)$$

Como cada uma das r bandas é limitada por duas linhas de fronteira, nas quais ficam centradas faixas de incerteza com área $2\varepsilon v$, tem-se $A_j = 2(2\varepsilon)v$, ou $A_j \sim \varepsilon$.

O ponto crucial desta argumentação diz respeito ao número r de bandas de bacia fora de A_0 mas ainda dentro do retângulo $v \times w$, envolvido na expressão 4.1. Este número depende da incerteza ε , pois quanto menor for ε , mais estreita é a faixa A_0 e portanto mais bandas sobram para fora dela. Essa dependência pode ser quantificada em termos da dinâmica na vizinhança da sela S_3 .

A região em estudo foi escolhida de maneira que as bandas da bacia de F_4 interceptassem a variedade instável de S_3 . Conforme o exposto na figura 4.8, o mapeamento estroboscópico inverso de terceiro retorno faz com que uma banda de bacia seja iterada sobre a banda seguinte, se aproximando sucessivamente da sela S_3 . Portanto, o número de bandas presente no retângulo coincide com o número de iterações inversas necessário para levar todas essas as bandas para dentro da faixa A_0 (mais precisamente, para a metade inferior dessa faixa, na figura 4.13). Ora, em termos aproximados, isso é equivalente a iterar r vezes todo o retângulo $v \times w$, pelo mapa inverso, até que sua pré-imagem esteja totalmente reduzida a uma estreita faixa $\varepsilon \times v$. E deve ser lembrado agora que, conforme mencionado na subseção (4.2.2), a taxa de contração ao longo da variedade instável é representada pelo autovalor λ_u do ponto de sela S_3 . Pode-se afirmar então que a aplicação inversa do mapa à largura total w do retângulo, depois de r iterações, resulta na pequena largura ε . É essa conclusão que conecta matematicamente r a ε , permitindo a obtenção da expressão para $A(\varepsilon)$:

$$\lambda_u^{-r} w \approx \varepsilon; \quad (4.2)$$

resolvendo para r ,

$$r \approx \frac{\log \frac{w}{\varepsilon}}{\log \lambda_u}; \quad (4.3)$$

como w e λ_u são constantes, pode-se resumir a dependência de r em ε na forma $r \sim \log \frac{1}{\varepsilon}$. Levando esse resultado em 4.1, juntamente com $A_j \sim \varepsilon$ e $A_0 \sim \varepsilon$, tem-se

$$A(\varepsilon) \sim \varepsilon + \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.4)$$

Abordar esse resultado para valores muito elevados de ε não tem sentido físico, pois se trata da incerteza nas condições iniciais. Para valores moderados, o termo linear tende a predominar significativamente. Isso significa que, enquanto ε não é muito pequeno, a área de indeterminação escala com a primeira potência da incerteza. Esse resultado concorda com o esperado para um conjunto com geometria suave. Já para ε muito pequenos, o termo linear é sobrepujado pelo termo que envolve o logaritmo, possibilitando que se escreva $A(\varepsilon) \sim \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$. Como a *fração incerta* $f(\varepsilon)$ é dada pela divisão de $A(\varepsilon)$ pela área total do retângulo $v \times w$ (que é outra constante), chega-se finalmente à expressão analítica que fornece a fração incerta do plano de fase em termos da incerteza na condição inicial [McDonald *et al.* 85a]:

$$f(\varepsilon) \sim \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.5)$$

O comportamento que simula a lei de potência fica esclarecido na figura 4.14, que exemplifica como o produto $\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$, para pequenos valores de ε , se ajusta razoavelmente a uma curva do tipo ε^α .

Há um conceito importante a ser ressaltado, que advém da conclusão obtida acima: mesmo que um sistema dinâmico multiestável não tenha fronteiras de bacia fractais em seu espaço de fase, ele pode apresentar obstrução à previsibilidade. O estado final fica indeterminado devido à alta sensibilidade das trajetórias à sua inicialização. E o expoente de incerteza fracionário indica que, à medida que se refina a precisão das condições iniciais, uma redução na incerteza não é acompanhada por uma redução proporcional na área incerta do espaço de fase.

Pode-se concluir, extrapolando-se o comportamento do oscilador idealizado para um problema real, que é prudente locar o sistema suficientemente afastado das regiões do espaço de fase nas quais é verificada a acumulação de bandas (fractais ou não), para que a segurança do regime dinâmico não seja comprometida.

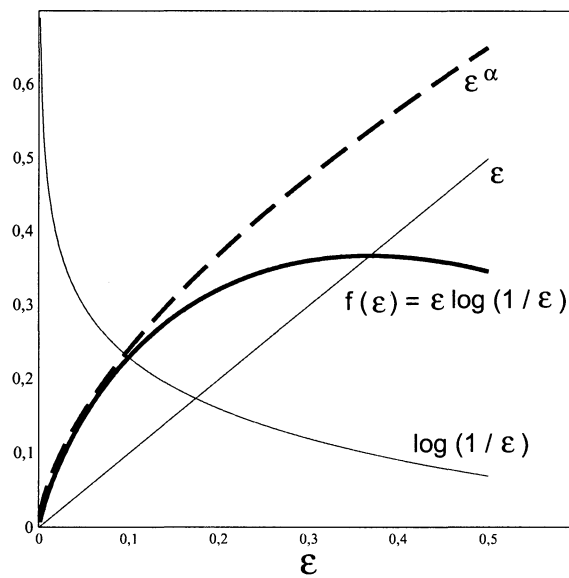


Figura 4.14: Para a região de acumulação de bandas, a área incerta do plano de fase depende da incerteza ε na forma $f(\varepsilon) \sim \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$. Neste gráfico esquemático, a linha sólida mais espessa representa o produto das duas linhas sólidas finas. Para pequeno ε , essa curva coincide razoavelmente com a lei de potência ε^α , representada pela linha tracejada. Isso faz com que o expoente de incerteza α obtido por simulação numérica resulte fracionário, sugerindo uma conclusão enganosa sobre a fractalidade da geometria das fronteiras de bacia.

Capítulo 5

Comportamento caótico e crise de fronteira

5.1 Parâmetros favoráveis à existência de caos

Para os casos de multiestabilidade estudados no capítulo (4), no oscilador que modela a ponte pênsil, a dissipação é calibrada num valor pequeno, assim como a excitação externa, e além disso, a não-linearidade é moderada. Naquela situação, as chances de ser encontrado um atrator caótico são raras, visto que, caso ocorra, tem sua bacia de atração muito delgada no plano de fase, ou um intervalo de existência demasiadamente estreito no espaço de parâmetros. Assim, não seria facilmente detectável em diagramas de bifurcação como os das figuras 4.2 e 4.5.

Entretanto, tal cenário é alterado para regiões mais afastadas no espaço de parâmetros, desde que se escolha condições fisicamente mais favoráveis à existência de caos. Atratores caóticos podem ser revelados, e com caráter robusto, para uma *excitação* mais intensa, associada a uma *dissipação* também maior, sendo também necessário acentuar a *não-linearidade*, conforme esclarecido no final da seção (3.2.5).

O papel do aumento na elasticidade dos tirantes já foi antecipado nas explicações da figura 3.13; para um desenvolvimento conceitual mais amplo a respeito do surgimento de caos, é apresentado a seguir um confronto entre dois exemplos. Nas figuras 5.1 ($k = 10$) e 5.2 ($k=50$) parte-se do caso livre ($B = 0$) e sem amortecimento ($\delta = 0$), e a introdução de δ e de B mostra *efeitos distintos*, devido à diferença no valor de k . Em todos os gráficos, são mantidos constantes a frequência da excitação ($\omega = 4, 0$) e o carregamento ($W = 1$).

Considere-se então as figuras 5.1 e 5.2. Por um lado, cria-se o caso *livre e amortecido* com a introdução de $\delta = 0,01$ mantendo $B = 0$. Para uma condição inicial genérica, a energia é lentamente dissipada, e o oscilador tende assintoticamente para o repouso, representado no plano de fase por um único ponto fixo estável, cujas coordenadas *independem* dessa condição inicial. E com o aumento para $\delta = 0,05$, esse ponto fixo persiste, sendo apenas abreviado o *tempo* de convergência. Observe-se que o aumento da não-linearidade k não altera qualitativamente esse resultado.

Por outro lado, o caso *forçado e não-amortecido*, já desenvolvido na subseção (3.2.4), é obtido pela introdução de $B > 0$ mantendo $\delta = 0$. A frequência da excitação ω possibilita

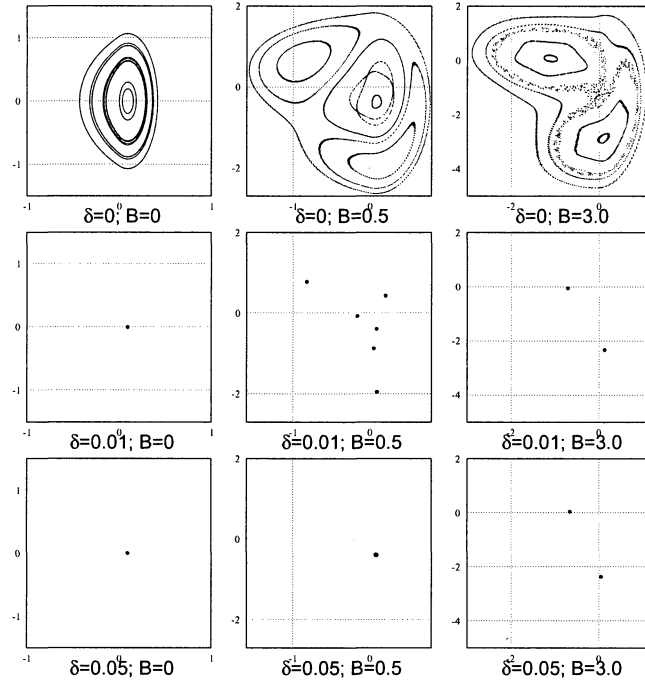


Figura 5.1: *Efeitos da introdução e do subsequente aumento do amortecimento δ e da excitação B em um caso com baixa não-linearidade ($k = 10$), sem criação de atrator caótico.*

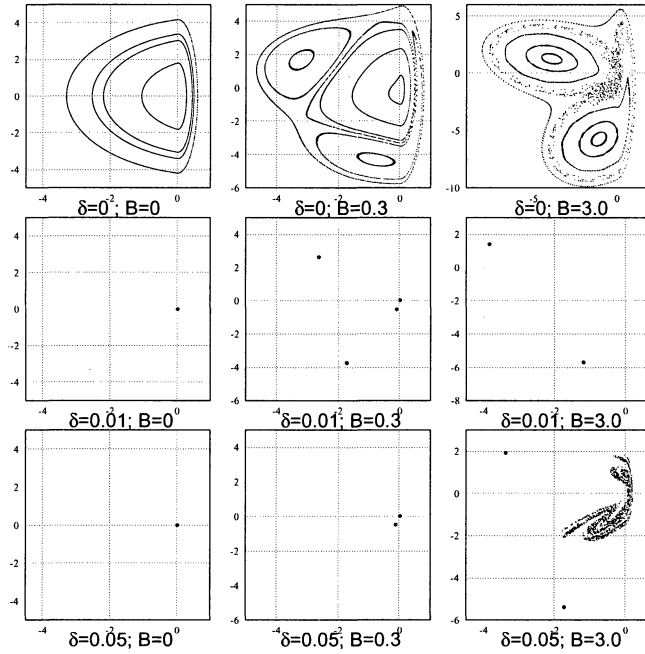


Figura 5.2: *Efeitos da introdução e do subsequente aumento do amortecimento δ e da excitação B em um caso com alta não-linearidade ($k = 50$), com criação de atrator caótico.*

regimes quase-periódicos, formando toros que aparecem como curvas fechadas no mapeamento estroboscópico; os toros destruídos pela perturbação criam estruturas de ilhas, notadamente uma ampla ressonância $2 : 1$ (tudo isso para ambos os valores de k). Com o subsequente aumento para $B = 3,0$, as ilhas aumentam de largura e são amalgamadas na forma de uma camada caótica, que no caso $k = 50$ mostra uma região central mais extensa.

A multiestabilidade se evidencia melhor para $k = 10$, e com pequena amplitude de excitação e fraco amortecimento (gráfico central da figura 5.1: é o mesmo caso já mostrado na figura 3.11, com três ciclos-limite coexistentes de períodos 1, 2 e 3, representados pelos pontos estroboscópicos). Os aumentos para $\delta = 0,05$ ou para $B = 3,0$ tendem a restringir a dinâmica a uma única resposta periódica, o mesmo acontecendo quando os dois aumentos são combinados.

No caso $k = 50$, ainda é verificada a multiestabilidade para pequenos δ e B (gráfico central da figura 5.2). Aumentos *em separado* para $\delta = 0,05$ ou para $B = 3,0$ causam o mesmo efeito de restringir a dinâmica observado no caso $k = 10$. Contudo, os dois aumentos *combinados* favorecem o aparecimento do *atrator caótico*.

O atrator caótico, no gráfico inferior direito da figura 5.2, é remanescente da camada caótica com região central mais extensa do caso hamiltoniano. Qual a explicação para esse atrator só ser verificado a partir de um valor mínimo de δ ? Esse comportamento está relacionado à *crise de fronteira*, tratada na seção (5.4). Antecipando alguns conceitos, o ponto fixo hiperbólico de período 2 do caso hamiltoniano, associado à ampla ressonância $2 : 1$, tem suas variedades estável e instável se cruzando em um número infinito de pontos, que servem de estrutura à camada caótica: inicializando o sistema nessa região, a conservação da energia faz com que a órbita permaneça indefinidamente no estado caótico. Com a introdução de um amortecimento muito fraco, aquele ponto hiperbólico dá lugar a um ponto de sela com mesmo período: a estrutura de infinitos cruzamentos persiste, na forma de um conjunto caótico não-atrativo. Ou seja, a presença da dissipação faz com que a órbita seja, cedo ou tarde, conduzida para o foco estável de período 2, que é o único estado permanente do sistema. O estado caótico só existe como transiente. O aumento de δ vai alterando a configuração das variedades no plano de fase, e para um valor crítico elas deixam de se cruzar, tangenciando-se. A partir desse valor, a variedade instável não toca mais a estável, e esta passa a constituir uma fronteira de bacia. A trajetória transita indefinidamente ao longo da variedade instável, cujo fechamento é o atrator caótico mencionado.

Portanto, como caso de referência para pesquisar o comportamento caótico, é interessante que sejam escolhidos os parâmetros da figura 3.13 [i], ou sejam, $k = 50$, $W = 1$, $\omega = 4,0$, $B = 3,0$ e $\delta = 0,05$. Nas seções seguintes, será estudada a estrutura do atrator caótico, seu intervalo de existência no espaço de parâmetros, e sua destruição por uma crise de fronteira, com as propriedades estatísticas referentes ao transiente caótico.

5.2 Coexistência de um atrator caótico com um foco estável

Tomando o grupo de parâmetros listados na seção anterior para o oscilador linear por partes amortecido e forçado, e procedendo a simulação numérica, são verificados dois

estados coexistentes: um atrator caótico e um foco estável de período 2. As trajetórias de fase com os pontos estroboscópicos aparecem na figura 5.3.

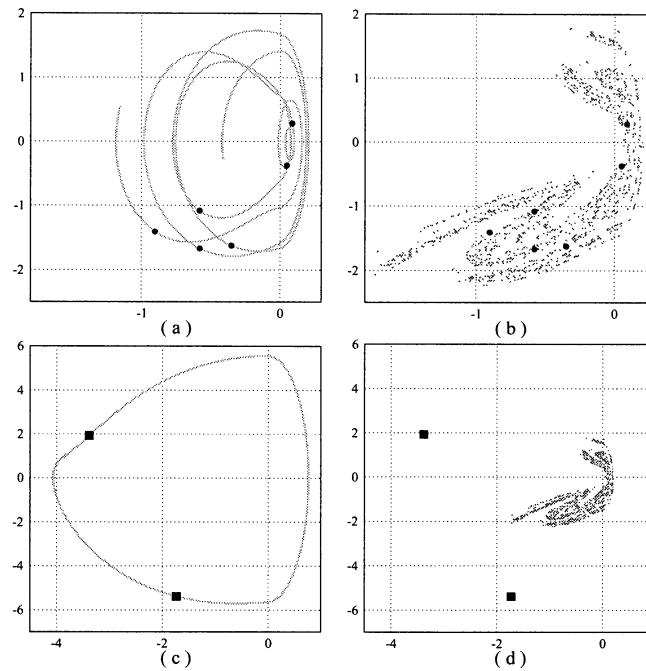


Figura 5.3: Trajetórias de fase com pontos estroboscópicos para o caso de coexistência entre um atrator caótico e um foco de período 2. São tomados $k = 50$, $W = 1$, $\omega = 4,0$, $B = 3,0$ e $\delta = 0,05$. Em (a), condição inicial pertencente à bacia do atrator caótico, com um trecho de trajetória contínua e 6 pontos estroboscópicos. A dinâmica caótica fica melhor representada em (b), apenas com os pontos estroboscópicos, distribuídos ao longo do atrator de dimensão fractal. Em (c), trajetória permanente obtida por uma condição inicial em outra bacia: os dois pontos estroboscópicos indicam o período da órbita. Em (d), os pontos estroboscópicos dos dois estados coexistentes.

Os dois comportamentos coexistentes podem também ser visualizados em termos das correspondentes *séries temporais*, na figura 5.4.

Os resultados mostrados nas figuras 5.3 e 5.4 podem ser interpretados fisicamente sem maiores dificuldades. O oscilador linear por partes, dependendo da posição e velocidade referentes à sua inicialização, pode responder à excitação externa periódica com dois estados assintóticos alternativos bem diversos: uma solução caótica de pequena amplitude, ou uma solução periódica sub-harmônica de grande amplitude. Tal comportamento pode também ser extrapolado para o exemplo da ponte pênsil; nesse caso, seria interessante explorar a situação, por exemplo, em termos de risco de colapso, devido a um limite de ruptura finito para os tirantes.

É oportuno levantar numericamente as *bacias de atração* dos dois estados coexistentes, usando um procedimento semelhante ao da seção (3.2.5). Na figura 5.5, os atratores da figura 5.3 [d] aparecem em conjunto com suas bacias de atração, assim como as duas condições iniciais tomadas para as séries temporais da figura 5.4.

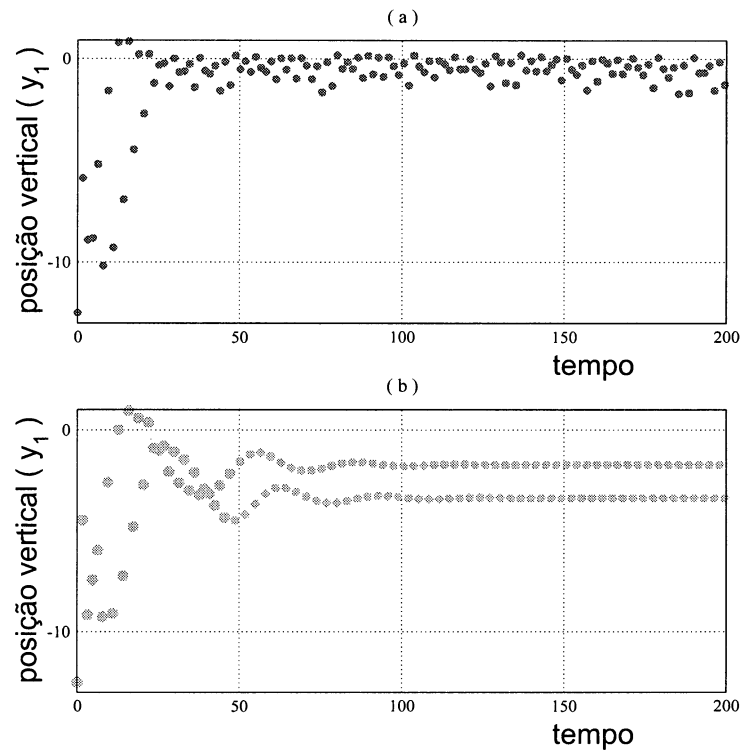


Figura 5.4: Séries temporais para a posição vertical y_1 dos pontos estroboscópicos, partindo de duas condições iniciais diferentes. Em (a), órbita caótica (mapa de Poincaré na figura 5.3 [b]); em [b], órbita de período 2 (mapa de Poincaré na figura 5.3 [c]).

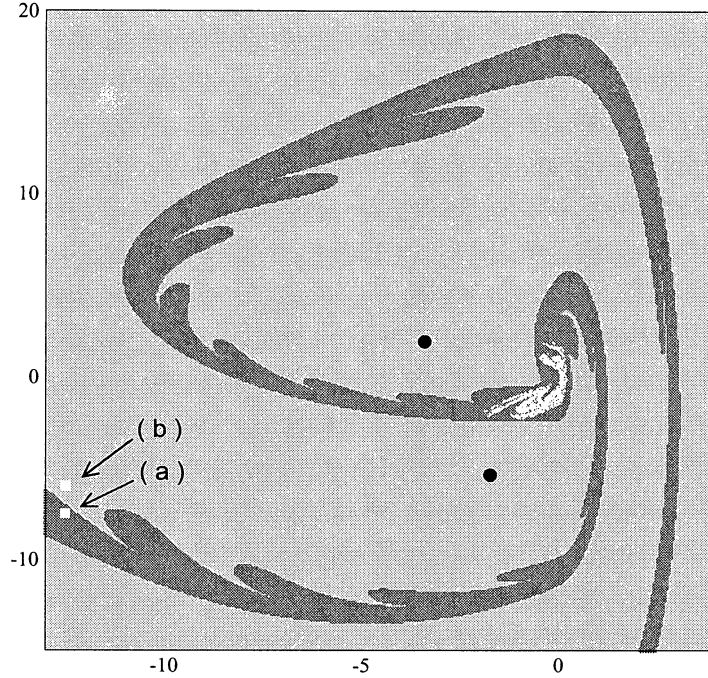


Figura 5.5: Os mesmos atratores da figura 5.3 [d], com suas respectivas bacias de atração. São também mostradas as duas condições iniciais tomadas para as séries temporais da figura 5.4.

A fronteira entre as bacias da figura 5.5 revela-se uma curva *suave*, que não aparenta fractalidade, sendo assim semelhante às mostradas nos demais casos da figura 3.13. Um fato importante, verificável na figura 5.5, é a proximidade do atrator caótico com a fronteira de sua bacia, o que indica que uma pequena alteração num parâmetro pode ocasionar uma *crise de fronteira*, mencionada na seção anterior.

A estrutura geométrica do atrator caótico mostrado na figura 5.3 [b] é mostrada mais detalhadamente na figura 5.6, na qual fica evidenciada uma distribuição não-uniforme dos pontos estroboscópicos no conjunto atrativo, aparentando uma geometria fractal. Pode ser comparado aos atratores caóticos obtidos na bibliografia consultada, para outros osciladores semelhantes [Cao *et al.* 01], [Kim e Noah 91].

Antes de ser investigada a extensão do intervalo de existência do atrator da figura 5.6, é importante comprovar rigorosamente que a dinâmica sobre tal conjunto seja realmente caótica. Em sistemas que envolvem um campo vetorial suave, a maneira usual de proceder esta comprovação consiste em calcular o máximo *expoente de Lyapunov* λ_{max} das trajetórias sobre o atrator; a dinâmica é comprovadamente caótica quando λ_{max} for positivo. No caso caótico, a divergência exponencial das trajetórias cria problemas numéricos concernentes a pequenos denominadores, mas estes são sanados por um método de ortorenormalização. Para sistemas não-suaves, como é o caso, devido à descontinuidade na derivada da força efetiva em $y = 0$, tal procedimento não é aplicável, sendo requerido um algoritmo mais genérico, e também mais complexo, para a determinação dos expoentes de Lyapunov [Müller 95].

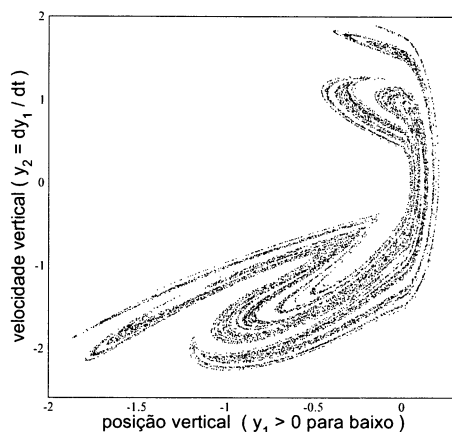


Figura 5.6: *Aspecto da estrutura geométrica do atrator da figura 5.3, com amostragem de 38430 pontos estroboscópicos.*

A comprovação de caoticidade, contudo, pode ser realizada com base em argumentos geométricos, semelhantes, de certa forma, àqueles desenvolvidos na seção anterior. Para tanto, deve ser mostrada a presença de infinitos *pontos homoclínicos* na região do plano de fase onde se localiza o atrator.

Tais pontos homoclínicos são definidos nas interseções entre a variedade estável e a instável de um *ponto de sela* inserido no corpo do atrator. Atratores caóticos contêm um número infinitamente grande desses pontos, que são órbitas periódicas instáveis (mas que não devem ser confundidos com as selas cujas variedades estáveis constituem a *fronteira da bacia*, mencionadas na seção anterior, associadas ao foco de período 2).

Visto que um ponto homoclínico é sempre mapeado sobre outro, basta registrar a ocorrência de uma única interseção para que isso implique na existência de infinitas outras [Grebogi *et al.* 88a].

Com os infinitos cruzamentos homoclínicos, fica caracterizada uma *ferradura de Smale* [Shaw e Holmes 83]: trata-se de um retângulo topológico, cujas imagens pelo mapeamento estroboscópico direto e inverso formam uma faixa dobrada [Grebogi *et al.* 83]; para um tempo infinito, o resultado é um conjunto invariante *não-atrativo*, que contém uma órbita densa [Guckenheimer e Holmes 83] (p.235) e é também chamado *sela caótica*. Uma órbita genérica, inicializada na vizinhança imediata da sela caótica, evolui no tempo com um comportamento extremamente irregular e complicado, de forma que outra órbita, iniciada muito próximo a esta, diverge dela exponencialmente com o decorrer do tempo, caracterizando uma dependência altamente sensível às condições iniciais.

O conjunto de órbitas periódicas instáveis consiste no suporte da medida natural no atrator caótico, responsável pela estrutura observada na figura 5.6 [Grebogi *et al.* 88a].

Portanto, para comprovar a caoticidade do comportamento dinâmico sobre o atrator da figura 5.6, deve-se selecionar um ponto de sela e traçar o trecho inicial de suas variedades estável e instável, até que sejam constatados os primeiros cruzamentos homoclínicos. Para a obtenção numérica das coordenadas de uma órbita periódica instável no plano de fase, foi feito uso do programa DYNAMICS II [Nusse e Yorke 97], assim como para o traçado

das variedades (na subseção (4.2.2), um método para esse traçado está explicado detalhadamente). Na figura 5.7, é mostrado um ponto de sela S_1 inserido no atrator. Aparecem os dois ramos W^u da variedade instável (cujo fechamento constitui o próprio atrator), assim como os dois ramos W^s da variedade estável, cada um deles com as 4 primeiras interseções homoclínicas.

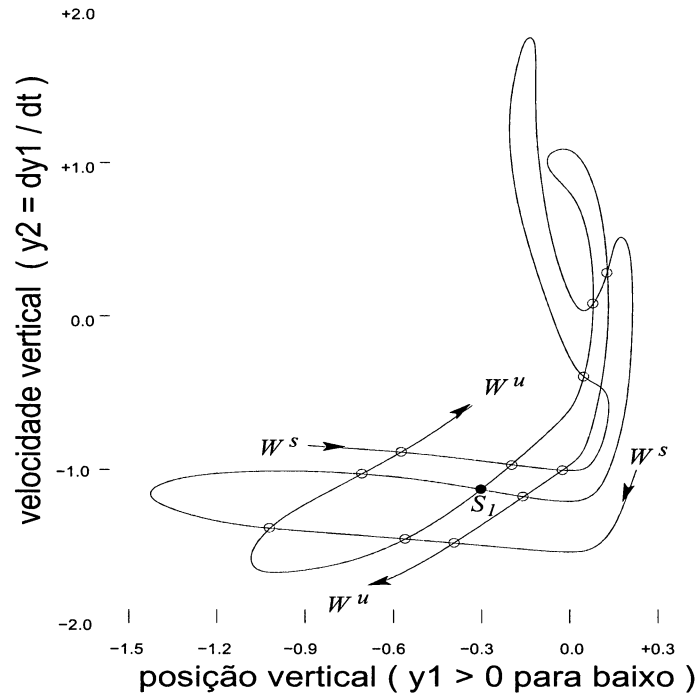


Figura 5.7: Ponto de sela S_1 inserido no atrator da figura 5.6, com os trechos iniciais das variedades instável W^u e estável W^s , obtidas mediante uso do programa *DYNAMICS II* [Nusse e Yorke 97]. As interseções homoclínicas indicam a formação de uma ferradura topológica, comprovando assim que o comportamento é realmente caótico.

As interseções homoclínicas consecutivas na figura 5.7 implicam na existência de um número infinito de tais pontos, o que evidencia a existência da ferradura topológica subjacente à dinâmica caótica no atrator da figura 5.6. A estrutura geométrica deste atrator é, portanto, fractal. Lembre-se porém que, de acordo com a figura 5.5, não se pode dizer o mesmo da fronteira de sua bacia, formada por uma configuração topológica diversa; tal configuração é tratada detalhadamente na seção (5.4).

5.3 Intervalo de existência do atrator caótico no espaço de parâmetros

Na seção anterior, foi investigada a estrutura topológica do atrator caótico para o oscilador linear por partes amortecido e forçado. Nesta seção, é agora explorada a alteração no comportamento do sistema com a variação gradativa dos parâmetros, partindo do caso de referência deste capítulo (figura 3.13 [i]). Nas subseções que seguem, são discutidos

os diferentes efeitos dessas variações, sendo apresentados *diagramas de bifurcações* com a elasticidade dos tirantes (k), a amplitude da excitação (B) e o coeficiente de amortecimento (δ).

5.3.1 Variação da elasticidade dos tirantes

De acordo com a figura 5.2, espera-se que a elasticidade dos tirantes (k), responsável pela não-linearidade do sistema, tenha um papel importante no aparecimento do comportamento caótico. Partindo de $k = 50$, o diagrama de bifurcações deve ser traçado com os cuidados descritos na seção (4.1), que se referem à técnica de *continuidade de órbita*. O resultado, mostrando a posição vertical y_1 dos pontos estroboscópicos do atrator para o intervalo $10 < k < 60$, é mostrado na figura 5.8.

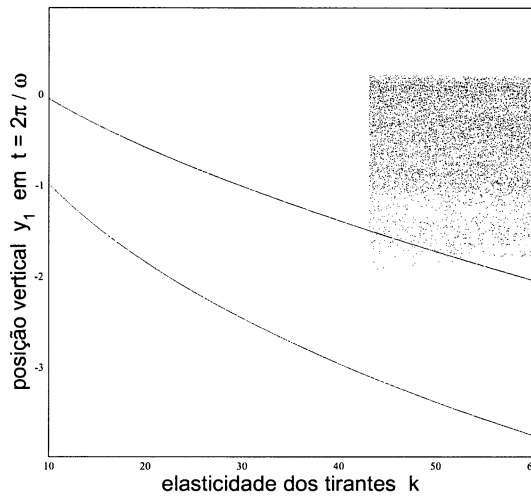


Figura 5.8: *Diagrama de bifurcações para o caso de coexistência entre o atrator caótico e um foco estável de período 2, com a variação da elasticidade dos tirantes. A interrupção brusca do intervalo de existência do atrator caótico em $k \approx 43$ sugere a ocorrência de uma crise.*

Ficam evidenciados, na figura 5.8, os intervalos de existência para o atrator caótico e para o foco de período 2 (este sendo amplo e contínuo). A coexistência entre os dois estados é iniciada bruscamente em $k \approx 43$, sugerindo a ocorrência de uma *crise de fronteira* neste valor de parâmetro. Um estudo pormenorizado desse processo de crise é desenvolvido na seção (5.4) para um caso análogo, com a variação do amortecimento δ .

5.3.2 Variação da amplitude da excitação

Assim como a não-linearidade (exacerbada pelo aumento da elasticidade dos tirantes), a intensidade da perturbação (representada pela amplitude da excitação externa B) também é fundamental para o aparecimento de caos no oscilador linear por partes, conforme a figura 5.2. Um diagrama de bifurcações, traçado de forma análoga ao da subseção precedente, é apresentado na figura 5.9, tendo-se partido do valor $B = 3,0$.

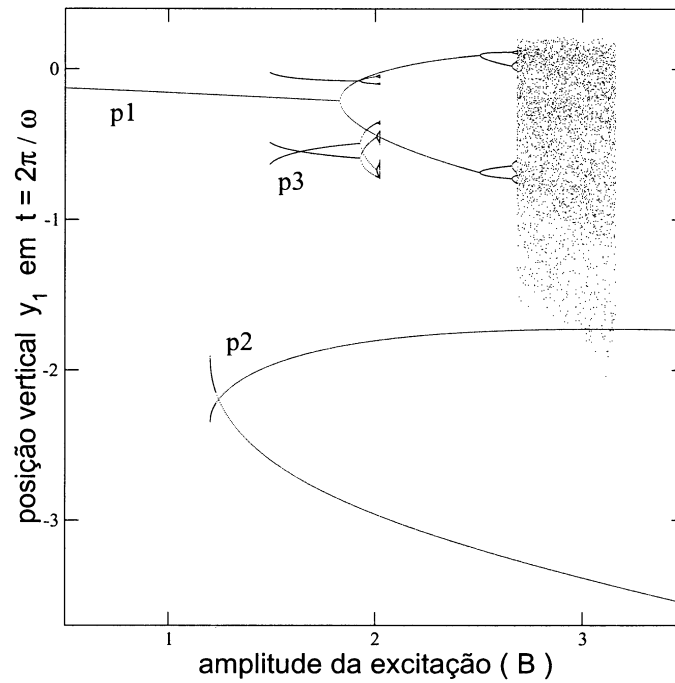


Figura 5.9: Diagrama de bifurcações para o caso de coexistência entre o atrator caótico e um foco estável de período 2, com a variação da amplitude da excitação. Além das duas órbitas dominantes, é possível serem detectadas soluções coexistentes em intervalos mais curtos, com bacias de atração muito delgadas, como a órbita de período 3 que sofre uma cascata de duplicações de período, sendo interrompida por uma crise interior.

Na figura 5.9 fica evidenciado o amplo intervalo de existência do foco estável de período 2, que em $B \approx 1,2$ coalesce com uma órbita instável de mesmo período (a qual não aparece no diagrama), numa bifurcação nó-sela, conforme explicado na seção (4.1). Diversamente do estudo com a variação de k , aqui a órbita caótica é criada no valor $B \approx 2,685$ por uma *cascata de duplicações de período*, sofrida por uma ressonância primária a partir de $B \approx 1,825$; em $B \approx 3,160$ o comportamento caótico cessa bruscamente, provavelmente devido a uma *crise interior*: ao longo da cascata, as órbitas que se bifurcam continuam a existir, tendo porém perdido a estabilidade; depois de criado o atrator caótico com a variação do parâmetro, ele pode colidir, no plano de fase, com uma dessas órbitas instáveis, sendo então destruído [Grebogi *et al.* 83]. A possível existência de outras órbitas nesse intervalo é ilustrada pela solução de período 3, que surge numa bifurcação nó-sela em $B \approx 1,490$, e sofre uma cascata de duplicações de período análoga à da órbita de período 1, sendo o atrator caótico, de curta existência com a variação de B , também destruído por uma crise interior. Supõe-se que existam mais órbitas semelhantes a essa, mas suas bacias tendem a ser muito delgadas, e a existir em intervalos bastante restritos do espaço de parâmetros. É razoável, portanto, afirmar que a dinâmica é dominada apenas por *dois* estados coexistentes. Para outros sistemas dinâmicos consultados na bibliografia, pode-se identificar diagramas análogos, com um número muito maior de atratores coexistentes [Feudel *et al.* 96].

5.3.3 Variação do coeficiente de amortecimento

Tendo em vista a argumentação já antecipada na seção (5.1) sobre o aparecimento de caos no oscilador linear por partes, é interessante agora conduzir a pesquisa para a variação do *coeficiente de amortecimento*. No valor de referência ($\delta = 0,05$), tem-se a coexistência do atrator caótico com o foco estável de período 2. O resultado está na figura 5.10.

Examinando a figura 5.10, percebe-se, além da extensa órbita de período 2, um intervalo de existência significativamente amplo para o atrator caótico, que surge bruscamente em $\delta \approx 0,04$. Essa descontinuidade está associada à *crise de fronteira* mencionada na seção (5.1), e que é explorada mais detalhadamente na seção (5.4). Além disso, são revelados dois intervalos estreitos dentro dos quais deixa de existir o atrator caótico (próximos a $\delta \approx 0,0865$ e $\delta \approx 0,1295$), usualmente chamados *janelas periódicas*. Nos limites desses pequenos intervalos, é freqüente ser verificado o comportamento dinâmico conhecido como *intermitência*, caracterizado por uma evolução temporal que alterna um regime aparentemente periódico com breves irrupções caóticas (*“bursts”*) [Schuster 95] (p.79), [Guckenheimer e Holmes 83] (p.344). A pesquisa de intermitência no oscilador linear por partes não faz parte dos objetivos desta tese de doutoramento, podendo consistir num trabalho futuro. A seção seguinte trata especificamente da crise de fronteira revelada na figura 5.10.

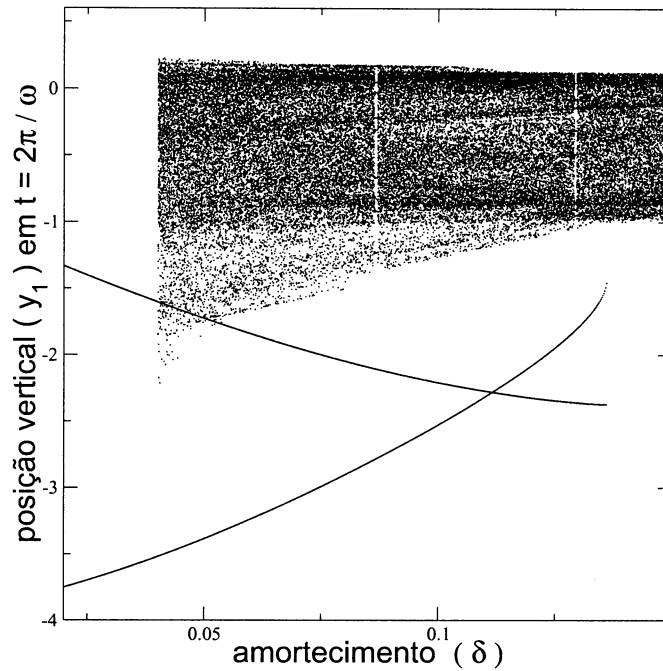


Figura 5.10: Diagrama de bifurcações para o caso de coexistência entre o atrator caótico e um foco estável de período 2, com a variação do coeficiente de amortecimento. A interrupção brusca do intervalo de existência do atrator caótico em $\delta \approx 0,040$ se deve a uma crise de fronteira.

5.4 Crise de fronteira

Nesta seção, toma-se o caso de referência deste capítulo e, por uma ligeira alteração no coeficiente de amortecimento δ , é criado o cenário para a crise de fronteira, que implica na destruição do estado permanente caótico. Nas subseções que seguem, o fenômeno é primeiramente explicado em termos topológicos; depois é exemplificado, por meio de simulação numérica, o comportamento conhecido como *transiente caótico*; finalmente são levantadas, também numericamente, propriedades *estatísticas* concernentes à duração do transiente caótico e suas variações com as condições iniciais e com o parâmetro, no caso, o coeficiente de amortecimento.

5.4.1 Tangências heteroclínicas

Em um dado sistema dinâmico, à medida que um dos seus parâmetros é variado, a configuração das estruturas reveladas no plano de fase costuma se alterar acompanhando essa variação. No caso de coexistência de um atrator caótico com um foco de período 2, o interesse se concentra na alteração da configuração das *variedades* estável e instável de um *ponto de sela* situado na fronteira entre as duas bacias. O objetivo desta subseção é mostrar que, ao variar um parâmetro, tem-se o caso de coexistência de caos com comportamento periódico enquanto essas variedades *não se tocam*; exatamente no parâmetro de crise, as variedades se *tangenciam*, e quando passam a se *interceptar*, o estado caótico só existe como *transiente*. Uma compreensão minuciosa do fenômeno requer uma exposição gradual

e detida da dinâmica nessas estruturas do plano de fase.

O referido ponto de sela está *associado* ao foco estável de período 2, conforme explicado com detalhes no caso da coalescência de uma órbita estável com uma instável na seção (4.1). No plano de fase, a sela periódica aparece como um conjunto de dois pontos $\{S_1, S_2\}$, situados ambos sobre a fronteira de bacia já mostrada na figura 5.5. Assim, tanto S_1 como S_2 são iterados sobre si mesmos pelo mapa estroboscópico de *segundo* retorno. Na vizinhança desses dois pontos, a dinâmica do mapa estroboscópico é regida pelos *autovalores* λ^s e λ^u da matriz jacobiana do sistema linearizado. Neste caso, tem-se ambos os autovalores reais, porém sendo $\lambda^s < 1$ e $\lambda^u > 1$. Isso faz com que as coordenadas da posição vertical y_1 e da velocidade y_2 do oscilador linear por partes nos instantes $t = y_3 = \frac{2n\pi}{\omega}$ sejam iteradas, pelo mapa direto ou inverso, ao longo de *segmentos de hipérbole*, conforme esquematizado na figura 5.11.

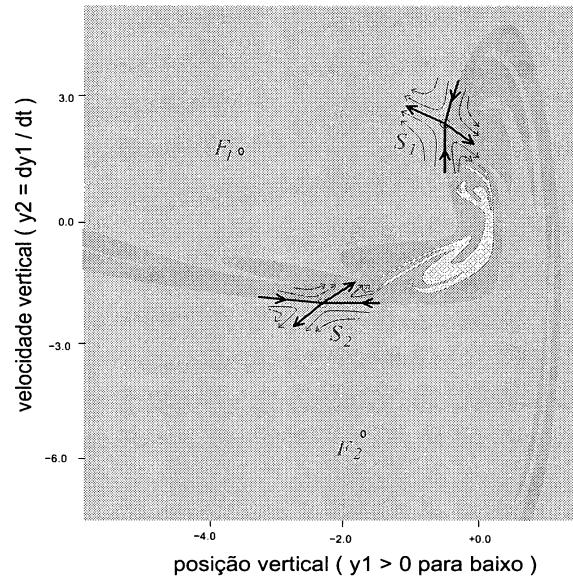


Figura 5.11: *Esquema mostrando o ponto de sela $\{S_1, S_2\}$ na fronteira entre as bacias para o caso de coexistência entre o atrator caótico e o foco estável $\{F_1, F_2\}$. A dinâmica do mapa estroboscópico na vizinhança da sela acompanha segmentos de hipérbole.*

Localmente, as assíntotas das hipérboles na figura 5.11 respeitam a orientação dos *autovetores* associados aos autovalores da mesma matriz jacobiana, consistindo nos chamados *sub-espacos* estável (E^s) e instável (E^u). Nota-se que esses sub-espacos são tangentes às *variedades* estável (W^s) e instável (W^u) do ponto fixo $\{S_1, S_2\}$ [Wiggins 97] (p.14), consistindo em *conjuntos invariantes*; essas variedades se encurvam ao se afastar de $\{S_1, S_2\}$. Pode ser feito aqui um esclarecimento sobre esses conjuntos.

Conforme visto na seção (5.2), no caso de coexistência são acessíveis, por simulação numérica, apenas dois estados finais alternativos, para quaisquer condições iniciais de uma malha no plano de fase. Contudo existem conjuntos invariantes de pontos, com medida de Lebesgue nula, que não convergem para nenhum dos dois atratores. Tais condições iniciais não são acessíveis numericamente mas, *se o fossem*, teriam suas imagens e pré-imagens, pelo mapa estroboscópico, sempre iteradas sobre o próprio conjunto.

A *fronteira* entre as bacias caracteriza um desses conjuntos, que é a própria *variedade estável* da órbita periódica $\{S_1, S_2\}$. Por exemplo, as duas condições iniciais indicadas na figura 5.5, situadas em lados opostos da fronteira, convergem para os dois atratores coexistentes. Imagine-se agora uma condição inicial *entre* esses dois pontos, *exatamente* sobre a linha de fronteira. Iterando esse ponto pelo mapa estroboscópico, sua imagem estaria ainda sobre a fronteira, porém numa região mais próxima do centro do plano de fase. E para $t \rightarrow +\infty$, as imagens sucessivas se aproximam assintoticamente do ponto de sela (alternando-se sobre as variedades estáveis de S_2 e de S_1). Para $t \rightarrow -\infty$, as pré-imagens se afastam do centro do plano de fase, sempre ao longo da variedade estável. O esquema da figura 5.12 mostra um curto segmento dos ramos da variedade estável de $\{S_1, S_2\}$, os quais constituem a fronteira de bacia.

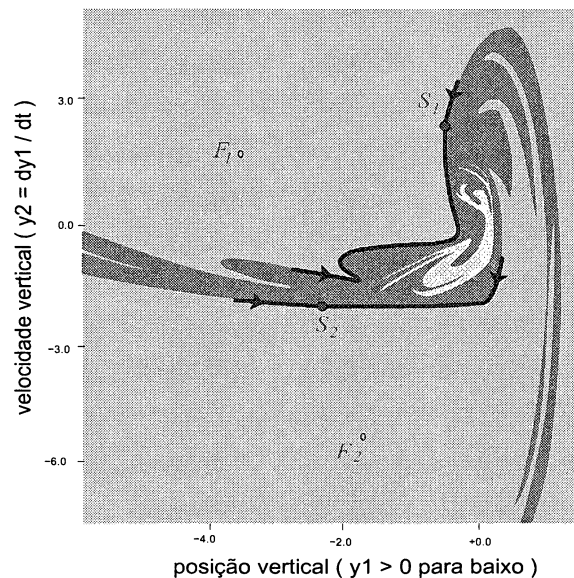


Figura 5.12: Esquema mostrando os ramos da variedade estável do ponto de sela $\{S_1, S_2\}$, que constituem a própria fronteira entre bacias da figura 5.5.

Da mesma forma, os ramos da *variedade instável* de $\{S_1, S_2\}$ também consistem em conjuntos invariantes. Um dos ramos forma duas curvas espiraladas, ou seja, pontos sobre essas espirais são sempre iterados sobre elas próprias. Pelo mapa inverso, para $t \rightarrow -\infty$, as pré-imagens se aproximam assintoticamente da sela $\{S_1, S_2\}$; para $t \rightarrow +\infty$, as imagens se aproximam assintoticamente do foco estável $\{F_1, F_2\}$. A figura 5.13 esquematiza este *primeiro ramo* da variedade instável.

Quanto ao conjunto invariante que constitui o *segundo ramo* da variedade instável, tem também as iterações dos seus pontos, pelo mapa inverso, se aproximando assintoticamente da sela $\{S_1, S_2\}$ para $t \rightarrow -\infty$. Mas no sentido do mapa direto, forma uma linha com infinitos dobramentos sucessivos, cujo fechamento é o próprio atrator caótico. É oportuno aqui chamar a atenção para a distinção entre este conjunto e aquele da figura 5.7, que também tem como fechamento o atrator caótico, mas que é formado pela variedade instável de um ponto de sela *inserido* no atrator caótico, e não sobre a fronteira de sua bacia. A figura 5.14 esquematiza este segundo ramo da variedade instável de $\{S_1, S_2\}$.

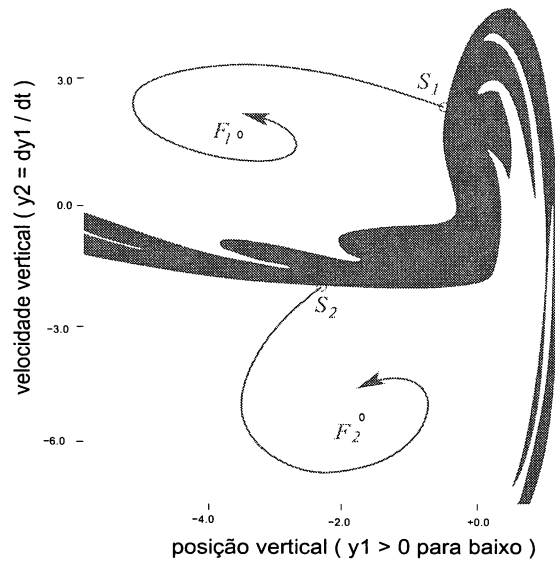


Figura 5.13: *Esquema mostrando um dos ramos da variedade instável do ponto de sela $\{S_1, S_2\}$, que espirala convergindo para o foco estável $\{F_1, F_2\}$ (para melhor visualização, a área da bacia do atrator periódico aparece em branco).*

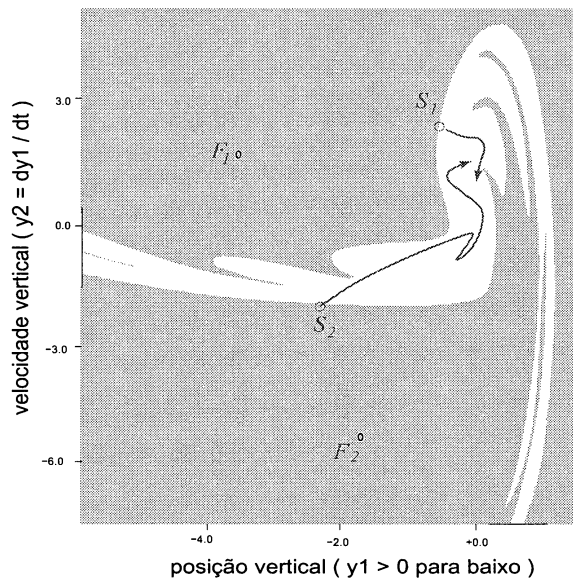


Figura 5.14: *Esquema mostrando o outro ramo da variedade instável do ponto de sela $\{S_1, S_2\}$, cujo fechamento é o atrator caótico da figura 5.6 (para melhor visualização, a área da bacia do atrator caótico aparece em branco).*

Os conjuntos invariantes mostrados separadamente nas figuras 5.12, 5.13 e 5.14 aparecem reunidos na figura 5.15. A determinação numérica das coordenadas de $\{S_1, S_2\}$, bem como o traçado dos segmentos das variedades estável e instável, foi realizada com auxílio do programa DYNAMICS II [Nusse e Yorke 97].

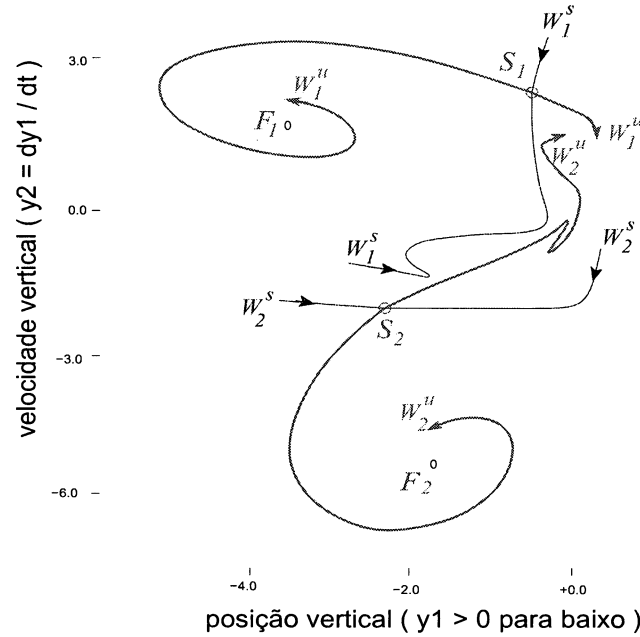


Figura 5.15: Ponto de sela $\{S_1, S_2\}$ com suas variedades estável e instável, cujos ramos estão mostrados separadamente nas figuras 5.12, 5.13 e 5.14. Pode-se constatar que as variedades não se tocam, caracterizando a coexistência dos dois atratores.

O esclarecimento acima, a respeito do comportamento dinâmico sobre as variedades estável e instável do ponto de sela na fronteira de bacia, é fundamental para que possa ser justificado o transiente caótico associado à crise de fronteira, em termos de *tangências heteroclínicas*. Num caso de coexistência (por exemplo, $\delta = 0,05$) a área do plano de fase se encontra dividida em duas bacias de atração, pela variedade estável de $\{S_1, S_2\}$. Conforme pode ser verificado por um exame cuidadoso da figura 5.15, o ramo da variedade instável cujo fechamento é o atrator caótico *não toca* a variedade estável. Isso significa que uma órbita que esteja percorrendo este atrator (variedade instável) pode eventualmente *se aproximar* da fronteira da bacia do atrator periódico (variedade estável), mas jamais a transpõe, se restringindo assim a visitar permanentemente a região do atrator caótico. Para $t \rightarrow +\infty$, a órbita preenche ergodicamente a estrutura mostrada na figura 5.6.

Mas este cenário é fortemente modificado pela variação no coeficiente de amortecimento (no caso, a *variação* se refere a uma *redução* do parâmetro). Num valor bem definido $\delta = \delta_{CR}$, a variedade instável de S_2 *tangencia* a variedade estável de S_1 (e vice-versa; por isso, esses pontos de tangência são ditos, nesse caso, *heteroclínicos*). A estrutura do plano de fase que subjaz ao comportamento dinâmico do sistema é alterada drasticamente, pois os pontos de tangência, pertencendo tanto à variedade instável como à estável de $\{S_1, S_2\}$, *conectam* as duas bacias de atração, que se fundem em uma única bacia, no caso, a do

foco estável $\{S_1, S_2\}$. Ou seja, o atrator caótico *deixa de existir*. Com uma redução do parâmetro para $\delta < \delta_{CR}$, as variedades realmente *se interceptam*, em um número infinito de *cruzamentos heteroclínicos*. Agora, *qualquer* condição inicial no plano de fase, mesmo que transite *temporariamente* ao longo do conjunto invariante, tendendo a preenchê-lo ergodicamente, acaba, cedo ou tarde, sendo encaminhada no sentido do *ramo espiralado* da variedade instável, e converge assintoticamente para $\{F_1, F_2\}$, cuja existência persiste para $\delta < \delta_{CR}$. Por isso se diz que, neste caso, o atrator caótico é *destruído* pela crise de fronteira, dando lugar a um *transiente caótico*. A interpretação física se refere a um comportamento que satisfaz aos requisitos para ser chamado de caótico, mas não por um tempo indefinidamente longo, pois sua tendência assintótica é um comportamento periódico (ou, em outros sistemas, a divergência para um atrator no infinito [Grebogi *et al.* 83]). A órbita no plano de fase acompanha uma estrutura conhecida como *sela caótica*, constituída pelos infinitos cruzamentos heteroclínicos, a qual caracteriza um conjunto caótico *não-atrativo*. A figura 5.16 ilustra a evolução do plano de fase com a redução de δ passando por δ_{CR} , resumindo o processo descrito acima.

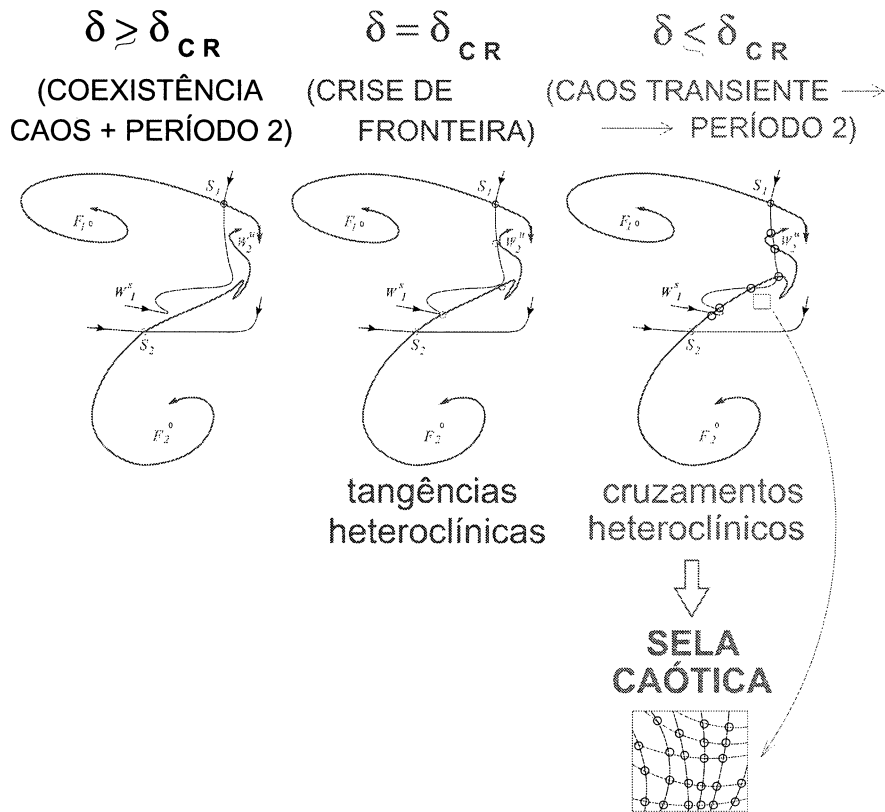


Figura 5.16: Esquema da alteração na configuração das variedades estável e instável do ponto de sela $\{S_1, S_2\}$ no plano de fase para o oscilador linear por partes, causada pela redução do coeficiente de amortecimento δ . O valor crítico δ_{CR} é marcado pela ocorrência das tangências heteroclínicas.

Na subseção seguinte, é enfocada uma descrição do comportamento transiente caótico, tanto para uma única órbita típica, em termos de retrato de fase e série temporal, como para um numeroso conjunto de órbitas, em termos estatísticos.

5.4.2 Transiente caótico

Conforme explicado na seção precedente, o transiente caótico é criado pela ocorrência da crise de fronteira no atrator caótico da figura 5.6. Assim, em termos de regime permanente, a coexistência ilustrada nas figuras 5.3 e 5.4 não é mais verificada. Exemplificando por meio da simulação numérica, uma órbita típica do mapa estroboscópico é mostrada na figura 5.17.

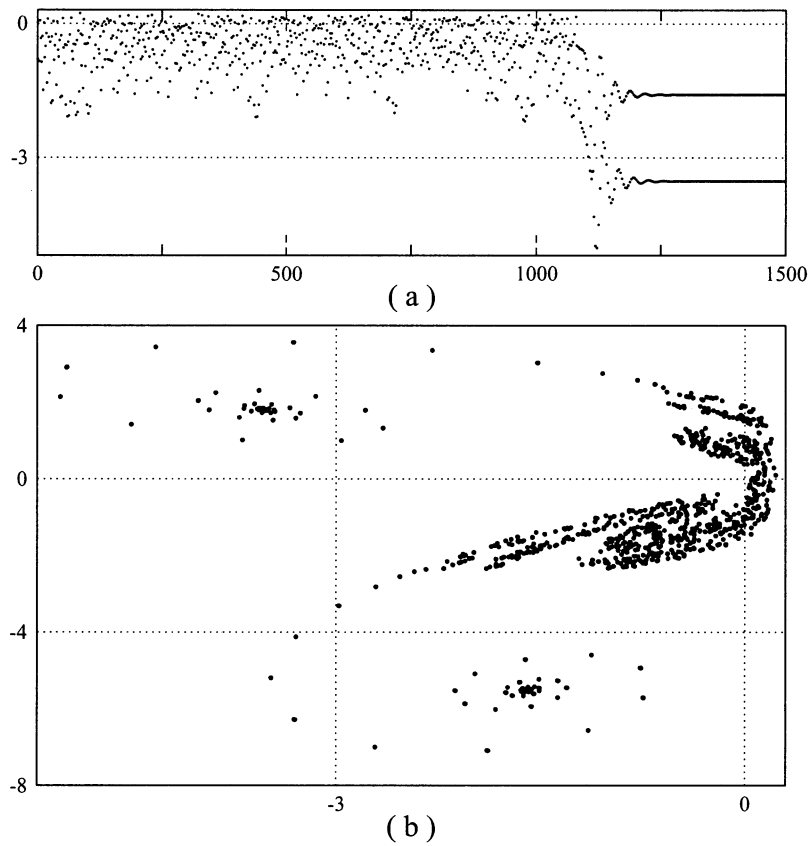


Figura 5.17: Uma única órbita típica exemplificando o transiente caótico, com $\delta = 0,039 < \delta_{CR}$. Em (a), série temporal dos pontos estroboscópicos da posição vertical. Após cerca de 1200 iterações aparentemente caóticas, o sistema converge assintoticamente para um ponto fixo de período 2. Em (b) os pontos estroboscópicos da mesma órbita são mostrados no plano de fase, evidenciando que, antes de espiralar para o foco estável, a órbita visita a sela caótica, que é uma estrutura remanescente do atrator caótico coexistente com o foco $\{F_1, F_2\}$ para $\delta > \delta_{CR}$.

Interpretando fisicamente o resultado da figura 5.17, o oscilador linear por partes, inicializado com *qualquer* valor de posição e de velocidade, responde à excitação externa,

para um tempo assintótico, segundo uma *única* solução, que é periódica e sub-harmônica, com grande amplitude. O que varia com a condição inicial é o comportamento transiente, que pode, por um longo intervalo de tempo, respeitar um regime caótico, no caso, com pequena amplitude. E a *duração* desse intervalo se mostra extremamente sensível à condição inicial, conforme é justificado a seguir.

No plano de fase, o conjunto subjacente à órbita exemplificada na figura 5.17 é a *sela caótica* mencionada na subseção anterior, composta pelos nós da malha formada pelas variedades instável e estável do ponto de sela $\{S_1, S_2\}$. Considere-se uma única célula da malha: qualquer condição inicial tomada no interior dessa célula é repelida pela sela caótica, acabando por convergir para o foco $\{F_1, F_2\}$. Mas o *número de iterações* do mapa estroboscópico necessário para ocorrer a convergência varia muito com a distância da condição inicial às bordas da célula, formadas pelos segmentos das variedades. Nessa célula, quanto *mais central* for o ponto, *mais rápida* é a convergência. O esquema da figura 5.18 esclarece a situação.

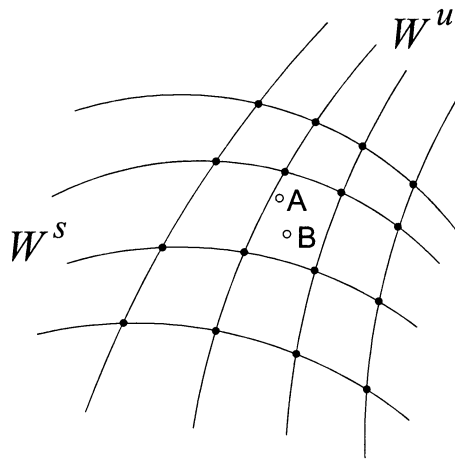


Figura 5.18: Representação esquemática, bastante simplificada, das células da malha formada pelas variedades estável W^s e instável W^u no plano de fase. Os pontos de interseção constituem a sela caótica. Tomando condições iniciais nos pontos A e B, ambas são repelidas pelo conjunto, acabando por convergir para o foco estável. Contudo, o tempo de convergência é mais curto para B, por estar mais afastado da borda da célula.

A malha esquematizada na figura 5.18 é, no plano de fase, bastante emaranhada, inclusive para escalas arbitrariamente finas. Assim, uma mínima alteração na condição inicial é suficiente para que ela seja repelida num *tempo* muito diferente do original.

Os tempos de duração do transiente caótico podem ser tratados estatisticamente, com os recursos oferecidos pela simulação numérica. Para isso, delimita-se uma janela retangular no plano de fase, que compreenda uma fração considerável da região ocupada pela sela caótica. Dentro desta janela são escolhidas aleatoriamente N condições iniciais. Arbitra-se também um critério para caracterizar um limite a partir do qual ocorre a convergência da órbita para o foco estável. Integrando cada condição inicial, são obtidos N valores do tempo de duração do transiente caótico τ . Com esses valores, monta-se um *histograma*.

Alguns pormenores técnicos envolvidos no procedimento descrito no parágrafo acima

merecem ser mencionados.

A *janela* no plano de fase não deve ser demasiado grande, pois um número substancial das condições iniciais estaria *fora* da sela caótica; por outro lado, se for muito pequena, corre-se o risco de tomar uma amostragem pouco representativa da estrutura do conjunto invariante. Como o atrator caótico do caso $\delta > \delta_{CR}$ é uma boa aproximação da região do plano de fase ocupada pelo conjunto caótico não-atrativo, aqui optou-se por um pequeno retângulo com uma boa densidade dos pontos estroboscópicos revelados na figura 5.6, conforme mostrado na figura 5.19 (para se ter uma idéia da densidade de pontos: a janela assinalada na figura 5.19 corresponde 0,14% da área total mostrada, mas contém 0,50% dos pontos estroboscópicos).

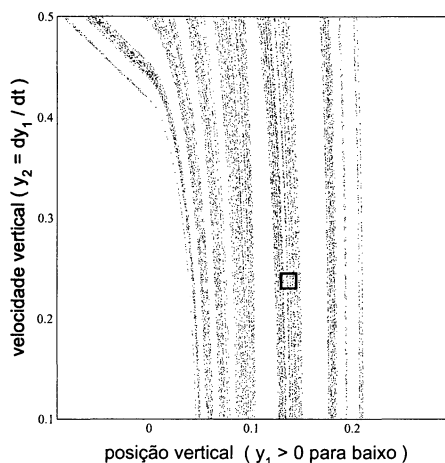


Figura 5.19: *Janela selecionada no plano de fase para testar a duração do transiente caótico de N condições iniciais escolhidas aleatoriamente. O atrator caótico do caso $\delta > \delta_{CR}$ serve de aproximação para a sela caótica.*

Quanto ao critério para caracterizar a *convergência da órbita* para o foco estável, que determina a duração τ do transiente caótico para cada uma das N condições iniciais testadas, foi estabelecida uma *distância mínima* no plano de fase entre iterações sucessivas do mapa estroboscópico de período 2. Enquanto duas imagens sucessivas da condição inicial se mostram afastadas de uma distância *maior* que a mínima, considera-se que a órbita ainda não se aproximou do foco. Tal critério se mostrou eficiente, e a figura 5.20 exemplifica duas séries temporais cujos tempos de transiente são $\tau_1 = 39$ e $\tau_2 = 286$, obtidos da forma descrita acima.

Outro passo necessário antes de iniciar a pesquisa numérica dos tempos de transiente para o histograma diz respeito ao valor apropriado do *número* de condições iniciais N a serem testadas no interior da janela mostrada na figura 5.19. Para proceder esta escolha, foi testada a convergência da *média acumulada* $\langle \tau \rangle$ com o aumento do número N de condições iniciais escolhidas aleatoriamente. O gráfico da figura 5.21 mostra o comportamento revelado.

O comportamento da média acumulada observado na figura 5.21 mostra flutuações intensas até $N = 500$, flutuações da ordem de 10% no intervalo $500 < N < 3000$, e

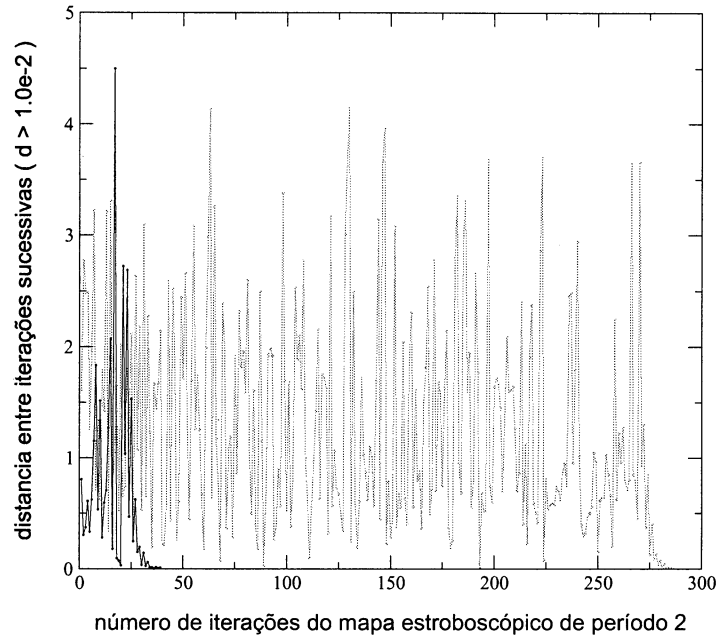


Figura 5.20: *Exemplo do procedimento usado para contagem do número de iterações do transiente caótico para duas condições iniciais diferentes (curva clara e curva escura). O critério estabelece uma distância mínima no plano de fase (10^{-2}) entre duas iterações sucessivas do mapa estroboscópico.*

pequenas flutuações para $N > 3000$. É prudente adotar um valor maior do que esse limite, por exemplo, $N = 6000$.

Finalmente, deve ser escolhido o valor do parâmetro δ para um histograma típico. Pela figura 5.10, o valor crítico está próximo de 0,040. Para obter δ_{CR} com mais casas decimais, uma órbita típica sobre a sela foi testada repetidas vezes, para diferentes valores de δ , tendo o cuidado de integrar o sistema por um grande número de iterações, para descartar transientes; chegou-se a $0,040046 < \delta_{CR} < 0,040047$.

A seguir, é mostrado o resultado do histograma para $\delta = 0,040045$. Foram escolhidos aleatoriamente $N = 6000$ pares de valores (y_1, y_2) , dentro dos limites da janela ($0,130 < y_1 < 0,145$; $0,230 < y_2 < 0,245$), compondo um vetor $N \times 2$ de condições iniciais, que é tomado como entrada em um programa computacional. O programa, elaborado para este fim, toma cada linha do vetor como condição inicial, integra por meio da subrotina LSODA [Hindmarsh 83], e conta as iterações até que a distância no plano de fase entre duas iterações sucessivas atinja o valor mínimo estipulado (10^{-2}). A saída deste programa é um vetor $N \times 1$ com os tempos de duração do transiente τ . Devido à proximidade do parâmetro crítico, os transientes são longuíssimos, exigindo um enorme tempo de processamento. Por sua vez, o vetor obtido é dado como entrada no programa XMGRACE, que fornece como saída o histograma normalizado, mostrado na figura 5.22.

A figura 5.22 pode ser interpretada como a fração das condições iniciais no plano de fase que demora um certo tempo para escapar da sela caótica. O gráfico se ajusta a uma lei exponencial, que respeita uma *distribuição de Poisson* centrada na média. Esse

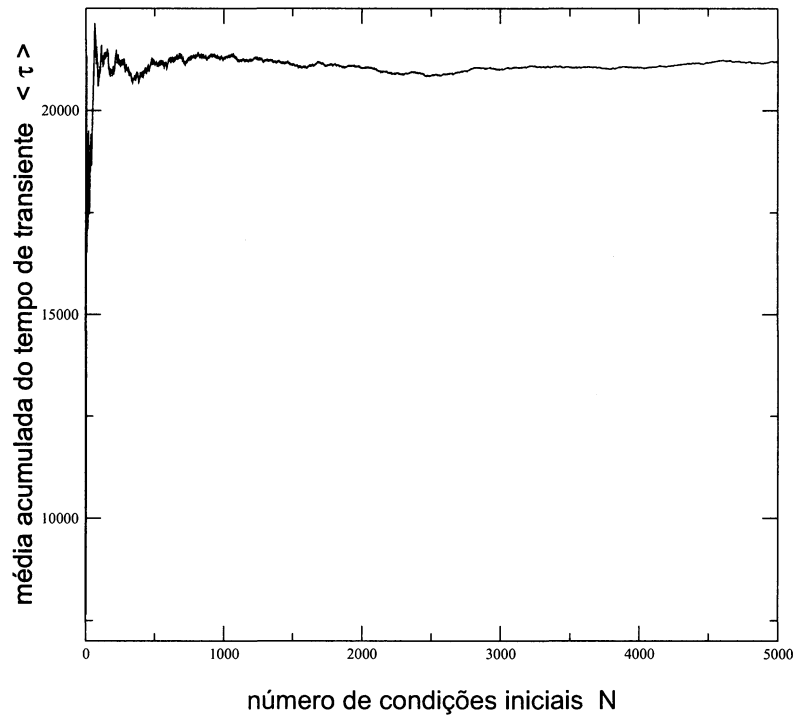


Figura 5.21: *Convergência da média acumulada dos tempos de transiente variando com o número N de condições iniciais. Para $N > 3000$ o valor de $\langle \tau \rangle$ se estabiliza (no caso, $\langle \tau \rangle = 21100$, com desvio padrão $\sigma_\tau = 60$).*

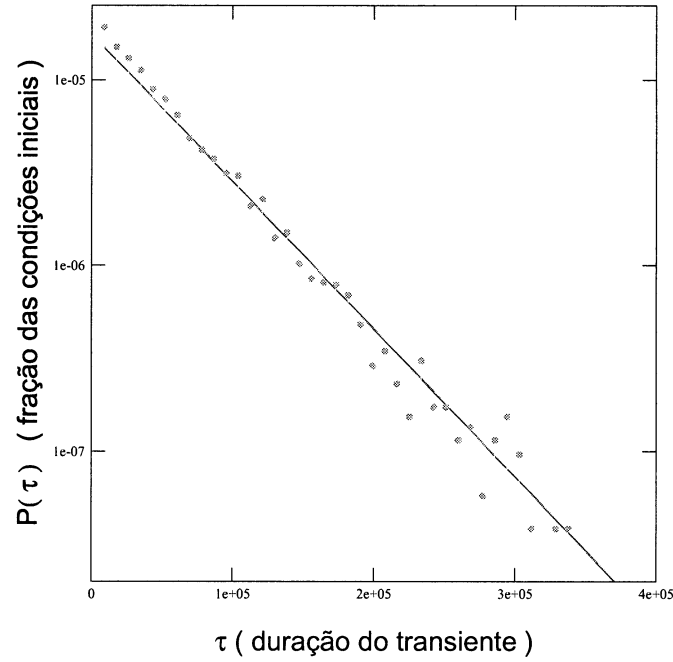


Figura 5.22: *Histograma obtido com 6000 condições iniciais escolhidas aleatoriamente na janela da figura 5.19, com $\delta = 0,040045$. O valor médio é $\langle \tau \rangle = 86297$. O ajuste da curva revela uma lei exponencial na forma $P(\tau) = 1,76 \times 10^{-5} \exp[-(1,828 \pm 0,047) \times 10^{-5} \tau]$. A escala vertical é logarítmica.*

comportamento pode ser justificado considerando que, para um dado tempo finito, qualitativamente falando, existem apenas duas possibilidades para uma órbita inicializada nas proximidades da sela caótica: ou ela convergiu para o foco, ou permaneceu na vizinhança do conjunto. Para um tempo ainda finito, mas muito longo, a probabilidade de convergência é muito maior que a de permanência, posto que a sela caótica é constituída por um conjunto com medida de Lebesgue nula. Em função disso, o problema, que estatisticamente se enquadraria numa distribuição binomial de probabilidades, pode ser reduzido, com boa aproximação, a uma distribuição de Poisson. Estão disponíveis também, na bibliografia, argumentos mais rigorosos que prevêem teoricamente o resultado obtido aqui pela simulação numérica [Romeiras *et al.* 92].

Os dados quantitativos obtidos do histograma da figura 5.22 são válidos apenas para $\delta = 0,040045$. Para valores do coeficiente de amortecimento não muito inferiores a δ_{CR} , espera-se que a média $\langle \tau \rangle$ varie com δ respeitando uma lei de potência [Grebogi *et al.* 88a]. Isso pode ser verificado numericamente, repetindo o cálculo mostrado acima para alguns valores de δ , e expressando-os em termos da diferença em porcentagem $\Delta = \frac{|\delta - \delta_{CR}|}{\delta_{CR}}$. Além disso, para se dispor de barras de erro, os tempos médios são calculados, para cada um dos 9 valores de δ , sobre 6 conjuntos com $N = 1000$ condições iniciais cada. O resultado desse procedimento (o qual requer tempos de processamento computacional da ordem de algumas semanas) está na figura 5.23.

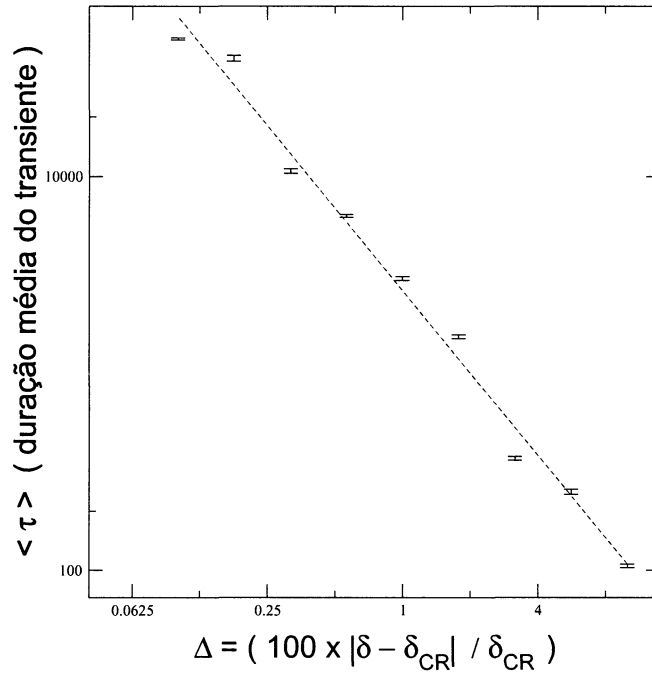


Figura 5.23: Variação da duração média do transiente caótico no oscilador linear por partes, com o decréscimo do coeficiente de amortecimento δ , expresso em termos da diferença percentual $\Delta = \frac{|\delta - \delta_{CR}|}{\delta_{CR}}$. As barras de erro se referem a 6 conjuntos diferentes com $N = 1000$ pontos cada. A curva ajustada segue uma lei de potência, na forma $\langle \tau \rangle = 2631,8 \Delta^{-(1,387 \pm 0,056)}$. Ambas as escalas são logarítmicas.

A lei de potência revelada pelo gráfico na figura 5.23 é típica de sistema caóticos em crise; existem também casos em que o comportamento é exponencial, chamados então de transientes caóticos *super-persistentes*, pois o intervalo de validade se estende a valores de parâmetro afastados até 20% do valor crítico [Grebogi *et al.* 85]. No caso em estudo, para δ muito inferiores a δ_{CR} , os transientes caóticos já não têm uma duração média significativa, com as condições iniciais convergindo rapidamente para o foco estável; por outro lado, no limite $\delta \rightarrow \delta_{CR}$, a duração dos transientes caóticos tende para o infinito.

A metodologia descrita nos parágrafos anteriores ofereceria ainda outros aspectos dinâmicos a serem explorados. Por exemplo, a configuração da sela caótica no plano de fase é detectável, levando em consideração que as condições iniciais com maior tempo de convergência são as mais próximas das variedades. Podem ser traçadas, portanto, boas aproximações da variedade instável usando o mapa direto, e da variedade estável usando o mapa inverso. Os pontos comuns aos dois conjuntos pertencem à sela caótica [Grebogi *et al.* 88a]. Essa pesquisa pode ser desenvolvida em um trabalho futuro. Outras possibilidades extras de estudo do sistema caótico envolvem medidas da *dimensão por contagem de caixas* do atrator da figura 5.6, e sua variação com os diferentes parâmetros, e também a *crise interior* revelada no diagrama de bifurcações da figura 5.9.

Capítulo 6

Escape, ruído, e acoplamento linear por partes

Neste capítulo são introduzidos, separadamente, três tipos diferentes de modificação a serem implantados no oscilador linear por partes que modela a ponte pênsil, e são investigadas algumas das conseqüências dessas modificações, definindo alguns rumos para pesquisas futuras. A primeira modificação acontece na curva do potencial efetivo, considerando um *limite de ruptura* por esforços de tração na mola unilateral (representada na ponte pênsil pelos tirantes). A segunda modificação acontece na equação diferencial do oscilador amortecido e forçado, à qual é acrescido um termo de *ruído* com pequena amplitude (na ponte pênsil, corresponderia, por exemplo, a flutuações moderadas na força externa periódica). A terceira modificação consiste em aumentar o número de equações diferenciais tratando de dois osciladores, *acoplados* por uma mola linear por partes (na ponte pênsil, esse novo sistema modela a transferência mútua de tensões entre o tabuleiro e o cabo principal, através dos tirantes). Em cada uma das três seções que seguem, o problema é colocado, com a apresentação do modelo matemático modificado, e alguns resultados da simulação numérica são discutidos, apontando caminhos para a possível continuidade deste trabalho.

6.1 Potencial modificado para escape

6.1.1 Hipóteses simplificadoras

Nos capítulos anteriores, não foram tecidas considerações sobre os *limites de ruptura* dos materiais que constituem o oscilador linear por partes. Num oscilador forçado real, especialmente o componente elástico (a mola unilateral) é passível de ruptura por fadiga, corrosão, etc, ou simplesmente por uma resposta do sistema que ultrapasse, em deslocamento, o limiar de tolerância.

No exemplo da ponte pênsil, uma das maneiras de introduzir esse aprimoramento no modelo é impor aos tirantes um limite superior y_R na *deformação* vertical para baixo (que está associada diretamente à *tensão* máxima admissível de tração, no caso, do aço). Para fins de controle, no primeiro modo flexional, pode-se tomar apenas o tirante situado no centro do vão. Essa escolha mostra-se a favor da segurança, não apenas por ser este o

valor de x correspondente à *maior* deflexão: como os comprimentos dos tirantes variam com x , com um mínimo em $\frac{L}{2}$, e o limite de ruptura de um material se refere à deformação *percentual*, mesmo um pequeno deslocamento representará maior risco para o tirante *mais curto*. Reduzindo o sistema a um oscilador unidimensional, a situação fica modelada pelo esquema mostrado na figura 6.1.

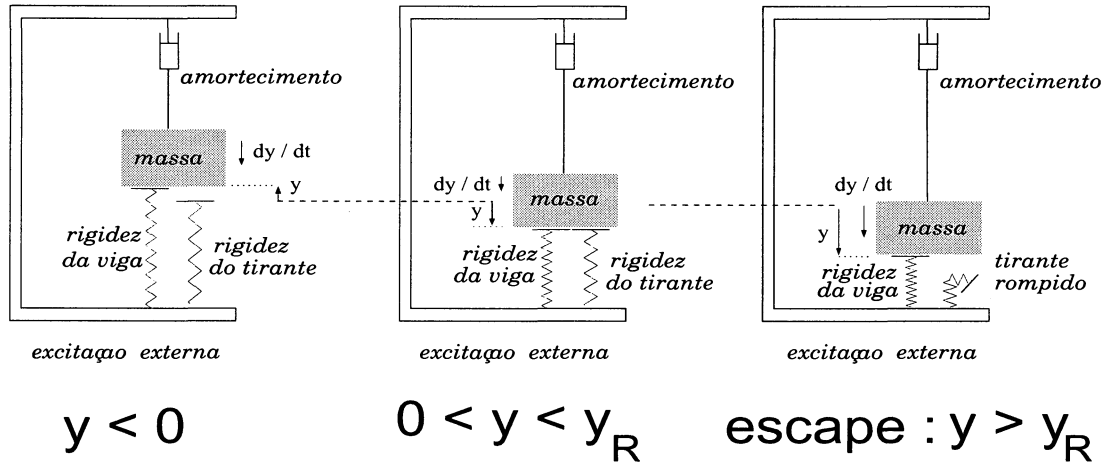


Figura 6.1: Oscilador unidimensional que representa o segmento central do tabuleiro da ponte pênsil no primeiro modo flexional; as três situações mostram o corpo descendo ($\frac{dy}{dt} > 0$); a partir de $y > 0$, a elasticidade do tirante passa a ser somada à da viga; a partir de $y > y_R$, o tirante rompe, causando o colapso da ponte.

O modelo matemático que introduz a possibilidade de escape é obtido, neste trabalho, mediante uma modificação no *potencial efetivo* do sistema $V_{ef}(y)$. É suposto que a ruptura dos tirantes implica também na ruptura da viga, ou seja, para fins de equacionamento, nos deslocamentos para baixo superiores a y_R , o sistema passa a ser regido apenas pelo seu peso próprio (e, em termos formais, também pela excitação externa e o atrito viscoso), de forma que a *força efetiva* $F_{ef}(y) = -\frac{dV}{dy}$ tenha zerada toda a parcela devida à elasticidade, restando apenas o *carregamento* ($F_{ef}(y) = W = \text{const}$). O potencial, nessa abordagem, respeita a forma $V_{ef}(y) = -Wy$ para o trecho $y > y_R$, conforme mostrado na figura 6.2 [a].

Contudo, uma queda tão brusca do valor de F_{ef} no ponto $y = y_R$ cria um modelo matemático que, apesar de aceitável, se mostra muito pouco realista. Na estrutura da ponte, a força restauradora se distribui por toda a extensão da viga, e em caso de colapso não se espera que os tirantes rompam todos simultaneamente, sendo razoável pressupor um atraso dependente, em média, de seu afastamento do centro do vão, seguido então do colapso da viga. Assim é interessante adotar, para o trecho $y > y_R$, uma função contínua que decaia rapidamente com y , por exemplo, na forma exponencial:

$$\begin{aligned}
 F_{ef}(y) &= W - y \quad \text{para } y < 0; \\
 F_{ef}(y) &= W - (k + 1)y \quad \text{para } 0 < y < y_R; \\
 F_{ef}(y) &= W - (k + 1)y_R \exp[-\beta(y - y_R)] \quad \text{para } y > y_R,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

podendo-se fazer $\beta = 10$ para acentuar o decaimento; a curva típica é mostrada na figura

6.2 [b]. Essa escolha tem a vantagem extra de minimizar eventuais problemas na integração numérica, relacionados à descontinuidade do sistema em $y = y_R$.

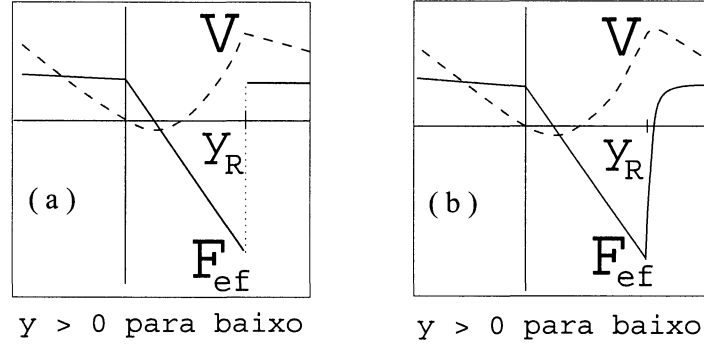


Figura 6.2: Potencial e força efetiva, modificados para introduzir a possibilidade de escape no oscilador linear por partes. Em (a), modelo descontínuo, com decaimento brusco em $y = y_R$; em (b), função exponencial, de acordo com a expressão 6.1, que presume um decaimento rápido, porém sem a descontinuidade.

É importante observar que a segurança do sistema deve ser analisada ao longo da evolução temporal *contínua*, e não apenas do mapeamento estroboscópico: se o limiar de ruptura y_R for ultrapassado para *qualquer* $y_1(t)$, o potencial de escape leva o sistema a divergir. Assim, a condição para escape se traduz no plano de fase pela *reta* $y_1 = y_R$.

Nesse sentido, a análise da dinâmica do sistema oscilante é conduzida em termos de uma *bacia de segurança* e uma *bacia de escape*. Ou seja, tendo sido escrito o modelo matemático, e arbitrados os valores dos parâmetros, é a *condição inicial* que determina se a evolução do oscilador irá ou não atingir, em algum instante, $y_1 > y_R$, conseqüentemente colapsando. Se atingir esse limiar, a condição inicial pertence à *bacia de escape* do sistema. O complemento da bacia de escape no plano de fase é a *bacia de segurança* (que pode englobar um ou mais atratores, periódicos ou caóticos). Num intervalo demarcado do plano de fase, a área da bacia segura costuma variar com a alteração dos parâmetros.

O sistema de equações diferenciais a ser integrado numericamente, com a introdução do potencial modificado para o escape, assume a forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2; \\
 \dot{y}_2 &= -2\delta y_2 - y_1 + W + B \sin(\omega y_3); \\
 \dot{y}_3 &= 1 \\
 &\text{para } y < 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2; \\
 \dot{y}_2 &= -2\delta y_2 - (k+1)y_1 + W + B \sin(\omega y_3); \\
 \dot{y}_3 &= 1 \\
 &\text{para } 0 < y < y_R,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2; \\
\dot{y}_2 &= -2\delta y_2 - (k+1)y_R \exp[-\beta(y_1 - y_R)] + W + B \sin(\omega y_3); \\
\dot{y}_3 &= 1 \\
&\text{para } y > y_R.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Como caso de referência para estudar numericamente o efeito da variação desses parâmetros, foi escolhido o da figura 3.13 [i], por envolver a coexistência entre comportamento periódico e caótico, e estar próximo da crise de fronteira. Assim é tratada uma situação interessante, na qual o sistema pode exibir um comportamento caótico de pequena amplitude e aparentemente seguro, mas que se revele ser apenas um longo transiente, após o qual tende a convergir para o atrator periódico de grande amplitude, cruzando então a linha $y_1 = y_R$ e colapsando.

Os parâmetros do caso de referência são: $k = 50$ (elasticidade dos tirantes), $W = 1$ (carregamento), $\omega = 4,0$ e $B = 3,0$ (frequência e amplitude da excitação) e $\delta = 0,05$ (amortecimento).

A divergência para o infinito, em termos da pesquisa computacional, é estabelecida por um *limite no plano de fase* para a variável $y_1(t)$ da trajetória contínua. Ao invés de fixar este limite igual a y_R , optou-se por um valor algumas vezes maior, para poder visualizar a trajetória se encaminhando para o infinito.

Na escolha do valor numérico de y_R , a ser agrupado com os parâmetros do caso de referência, deve-se ter em mente que algumas trajetórias na janela adotada do plano de fase interceptem a linha $y_1 = y_R$, mas não todas, para partir-se de um caso não-trivial. Para esse fim, o valor $y_R = 0,50$ mostrou-se apropriado.

Para uma visualização preliminar das situações possíveis, a figura 6.3 exemplifica três trajetórias típicas para condições iniciais diferentes, duas delas na bacia segura e uma na bacia de escape (com $y_R = 0,9$ para evidenciar melhor as trajetórias seguras). A configuração das bacias para o oscilador linear por partes é investigada nas subseções seguintes, assumindo o modelo simplificado apresentado acima.

6.1.2 Erosão da bacia de segurança

Esclarecimentos preliminares

Chama-se *erosão* de uma bacia de atração, numa região demarcada do espaço de fase, ao decréscimo percentual da área da bacia devido à variação gradativa de um parâmetro do sistema [Santee e Gonçalves 99], [Thompson *et al.* 90]. Nesse processo, a fronteira entre as bacias pode ter sua geometria alterada de suave para fractal, sendo esse processo visualizável, geralmente, por meio de *filamentos* da bacia de escape que adentram progressivamente no corpo da bacia de segurança, conforme um dos parâmetros é variado.

Neste trabalho, é investigada a erosão da bacia de segurança para o oscilador linear por partes, de acordo com a alteração de três dos parâmetros, analisados independentemente: a amplitude da excitação externa (B), o coeficiente de amortecimento (δ) e a deformação máxima (y_R). Para cada um deles é delimitado um diferente intervalo de variação, atendendo em cada caso aos interesses do problema. No plano de fase, foi escolhida a janela

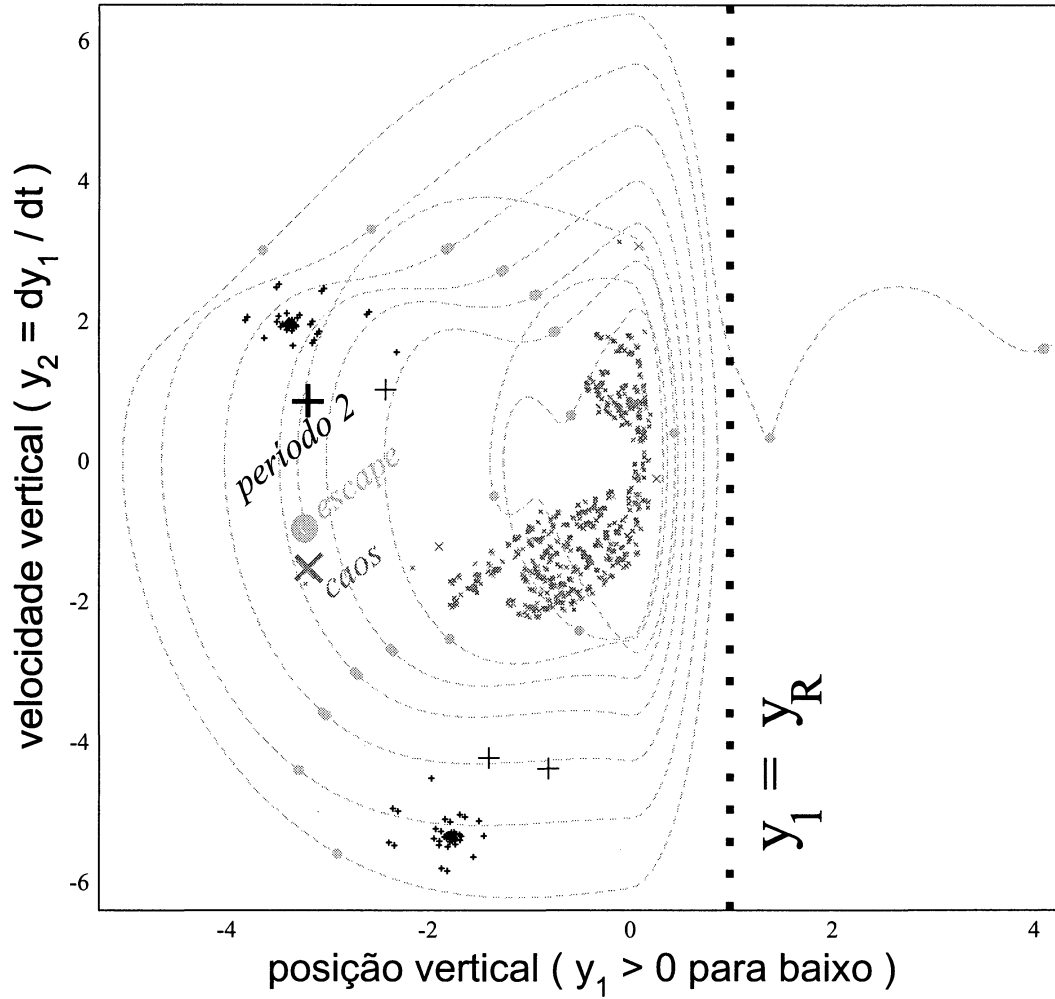


Figura 6.3: Três trajetórias típicas para o oscilador linear por partes, com $k = 50$, $W = 1$, $\omega = 4,0$, $B = 3,0$, $\delta = 0,05$ e $y_R = 0,9$. A condição inicial assinalada com (●) gera uma trajetória de fase que acaba por interceptar a linha $y_1 = y_R$, sendo portanto um ponto da bacia de escape. Os pontos do mapa estroboscópico marcados sobre a trajetória contínua indicam que a sua tendência, no sistema sem limite de ruptura, seria convergir para o atrator de período 2. Por outro lado, as condições iniciais assinaladas com (+) e (×) (cujas evoluções são mostradas na figura apenas pelos pontos estroboscópicos) convergem, respectivamente, para o atrator de período 2 e para o atrator caótico, pertencendo ambas, portanto, à bacia de segurança.

$-6 < y_1 < +4$, $-8 < y_2 < +4$ para todos os casos tratados. A variação da área percentual da bacia segura foi então levantada numericamente. Foram também selecionados os gráficos das bacias de atração para alguns valores de interesse, quatro deles acima e quatro abaixo do parâmetro de referência, de forma a visualizar o processo de erosão no plano de fase. Antes de apresentar os resultados obtidos, há um aspecto, inerente ao modelo em estudo, que deve ser enfatizado.

O estudo de erosão de bacias de segurança para osciladores não-lineares forçados encontrado na literatura se distingue do caso tratado neste trabalho, por se referir tipicamente a potenciais na forma [Thompson *et al.* 90]

$$V(y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3, \quad (6.3)$$

por exemplo, no caso de um navio sujeito ao impacto de ondas oceânicas. Condições iniciais que não levam o sistema a colapsar constituem a bacia segura e, nesse caso, realmente coincidem com a bacia de um atrator limitado (ou com a união das bacias de dois ou mais atratores limitados); quanto ao escape, é interpretado como um atrator no infinito. O início do processo de erosão está diretamente associado a uma *tangência homoclínica*, para um parâmetro bem determinado, entre as variedades estável e instável de um ponto de sela. Dando continuidade à variação do parâmetro, a essa tangência sucedem-se *cruzamentos homoclínicos*. Como cada cruzamento mapeia sobre um outro até o infinito, as variedades exibem uma geometria emaranhada, que está relacionada à configuração dos filamentos que caracterizam a erosão da bacia [Soliman e Thompson 92].

Já no oscilador linear por partes que modela a ponte pênsil, a condição para escape envolve uma escolha algo arbitrária, cujo efeito é equivalente ao de tomar inicialmente as bacias no plano de fase *sem* a possibilidade de escape, e demarcar uma linha $y_1 = y_R$ que *intercepta* uma ou mais dessas bacias. O foco da análise é transferido, portanto, para a evolução em tempo contínuo do regime *transiente*: mesmo condições iniciais muito afastadas da linha $y_1 = y_R$ podem gerar trajetórias que a interceptem, levando o sistema ao colapso.

Nesse contexto, são apresentados a seguir os resultados obtidos por simulação numérica para a erosão da bacia segura, no oscilador linear por partes.

Variação na amplitude da excitação

No caso de referência ($B = 3, 0$), o atrator caótico coexiste com um atrator de período 2. Analisando fisicamente, uma *redução* de B tende a causar um *aumento* na bacia de segurança, pois a baixa injeção de energia reduz a probabilidade de as trajetórias acessarem a região do plano de fase na qual $y_1(t) > y_R$. Fixando todos os outros parâmetros, foi testada uma malha de condições iniciais na janela referida acima, para um conjunto de amplitudes de excitação no intervalo $1, 0 < B < 4, 0$. O resultado é mostrado na figura 6.4.

Na figura 6.4, é mostrado também o *diagrama de bifurcações* no mesmo intervalo de variação de B (reproduzido da figura 5.9), o que elucida, em parte, alguns aspectos a serem observados na curva.

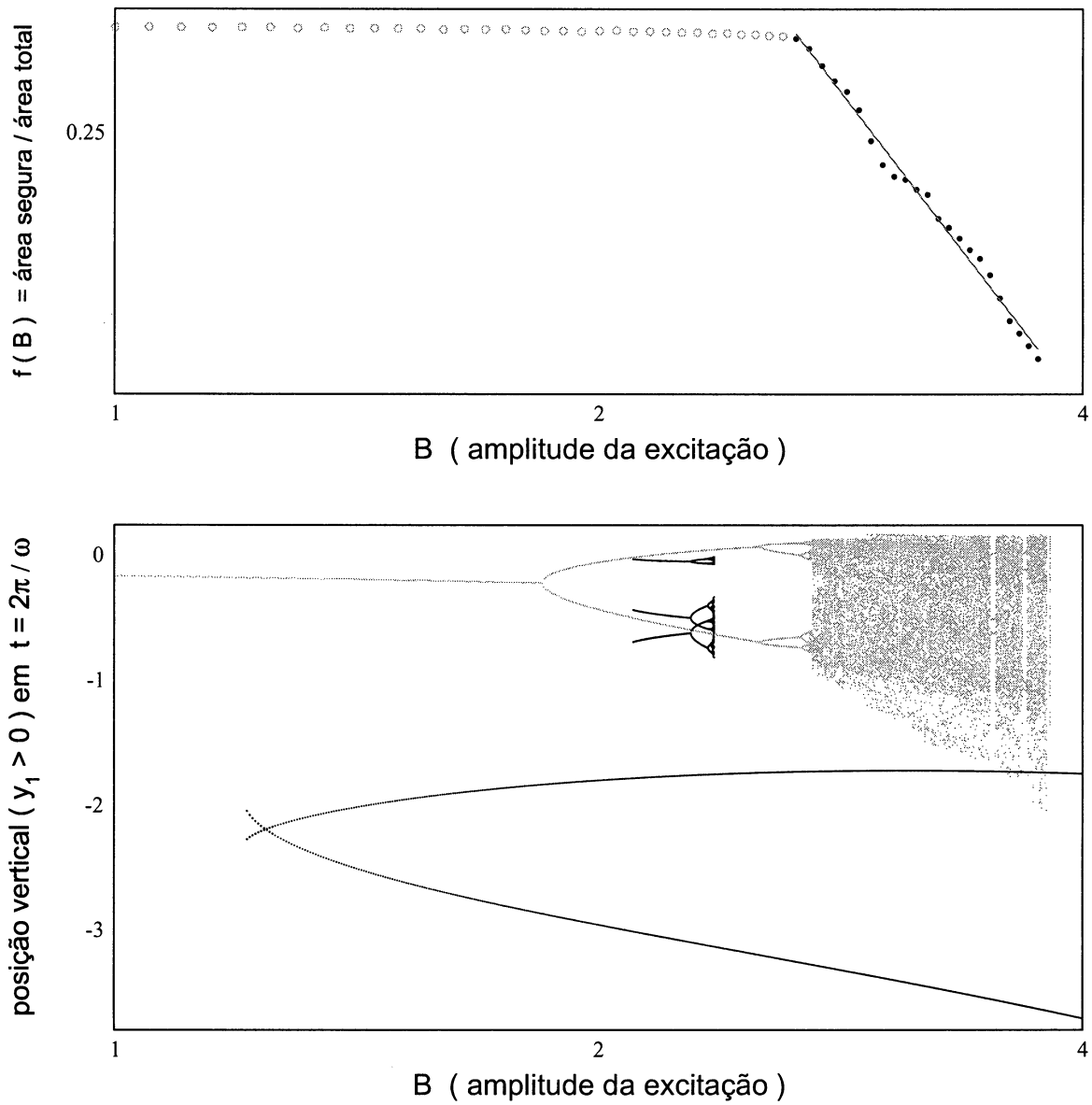


Figura 6.4: *Decréscimo da área percentual da bacia segura com o aumento da amplitude da excitação. O confronto com o diagrama de bifurcações mostra um paralelo entre o intervalo de existência do estado caótico ($2,65 < B < 3,75$) e o da validade da lei de potência $f(B) = 2,9B^{-2,3}$ (com exceção da escala vertical no gráfico inferior, as demais são logarítmicas).*

Por exemplo, a lei de potência, bem definida no intervalo $2,65 < B < 3,75$, corresponde quase exatamente à existência do atrator caótico. O referido atrator é criado por uma cascata de duplicações de período, a partir de um foco estável de período 1, correspondente a uma resposta harmônica. Essa órbita coexiste, num extenso intervalo, com a resposta sub-harmônica de período 2. São tomadas como seguras as condições iniciais que convergem para qualquer uma das órbitas, ao invés de se dirigirem ao atrator no infinito (se bem que, como a amplitude da resposta caótica é menor, esta envolve a maioria das condições seguras).

Além disso, a anulação brusca de $f(B)$ em $B \approx 3,75$ se deve à destruição do atrator caótico, explicada pela sua colisão com uma órbita instável, indicando uma *crise*.

Coexistindo com as duas outras soluções no pequeno intervalo $2,10 < B < 2,36$, aparece uma órbita de período 3, que nasce numa bifurcação nó-sela, sofrendo a partir de $B = 2,28$ uma cascata de duplicações de período, conduzindo a um estreito intervalo caótico, que morre bruscamente, também devido a uma crise. A contribuição da bacia correspondente a este estado é muito pequena, o que explica o fato de não ser afetado o lento decréscimo da área da bacia segura nesse trecho. Não se descarta a possibilidade, em outros intervalos curtos, da existência de órbitas de alto período, mas envolvendo bacias demasiadamente delgadas; assim, a pesquisa dessas órbitas não chega a ter relevância para os objetivos deste estudo.

A figura 6.5 mostra 9 etapas da erosão da bacia segura (área mais clara), acompanhando o gráfico da figura 6.4. É visível a incursão progressiva dos filamentos que emergem da bacia de escape (área escura), reduzindo gradualmente a área de segurança, até que esta se anula bruscamente devido à destruição do atrator caótico pela crise, em $B \approx 3,75$.

Uma melhor compreensão do plano de fase revelado nesta seção pode ser conseguida imaginando-se um caso simplificado, de um sistema que tenha como únicos estados finais possíveis um foco estável, locado em (y_1^*, y_2^*) , e o colapso (por exemplo, um oscilador unidimensional, livre mas amortecido, com uma mola que se rompe para uma deformação $y > y_R$). Nesse caso, uma condição inicial (y_{01}, y_{02}) gera uma trajetória contínua que representa um transiente, geometricamente uma espiral que tende a convergir assintoticamente para o foco (y_1^*, y_2^*) , numa taxa temporal que é dada pelos autovalores na vizinhança desse ponto. Caso esta espiral intercepte a linha $y_1 = y_R$, a condição (y_{01}, y_{02}) pertence à bacia de escape. Para que esta interseção ocorra, é necessário que a *distância* de (y_{01}, y_{02}) até (y_1^*, y_2^*) seja *maior* do que $y_R - y_1^*$. Num caso particular em que a espiral seja equilátera (autovalores iguais), conclui-se que a *bacia segura* engloba todas as condições iniciais interiores a uma *circunferência* de raio $y_R - y_1^*$, centrada na origem, como mostra a figura 6.6. Espera-se que, em casos mais gerais, essa estrutura geométrica seja ao menos parcialmente preservada.

De fato, a fronteira entre bacias mostrada na primeira etapa da figura 6.5 é constituída por uma curva suave. A incursão dos filamentos que cria a fronteira fractal começa a ficar mais pronunciada em $B = 2,70$. E este parâmetro é ligeiramente *inferior*, no diagrama de bifurcações da figura 6.4, ao que dá nascimento ao atrator caótico na região de acumulação. Conforme já estudado no oscilador de Duffing, a tangência homoclínica indica a transformação de uma fronteira suave para fractal, para a bacia de um atrator

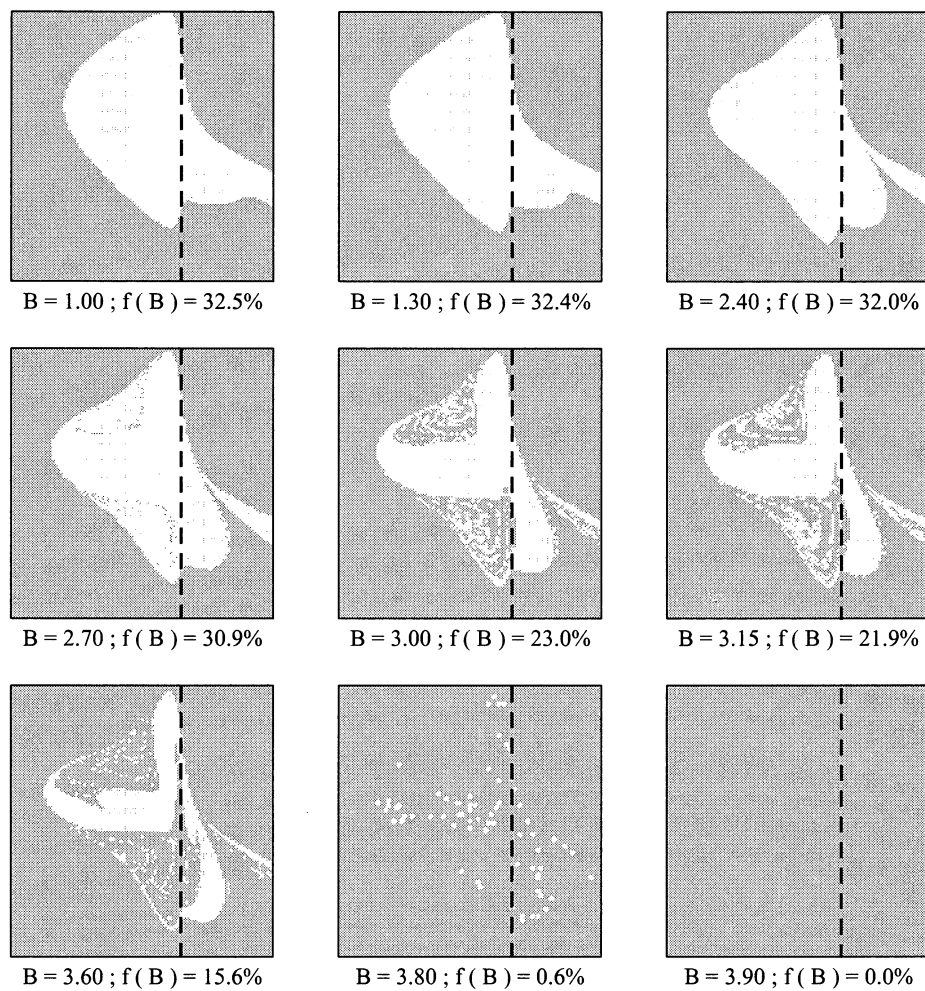


Figura 6.5: *Etapas da erosão da bacia segura com o aumento da amplitude da excitação, visualizável pelos filamentos da bacia de escape. Compare-se o decréscimo da área com o gráfico da figura 6.4.*

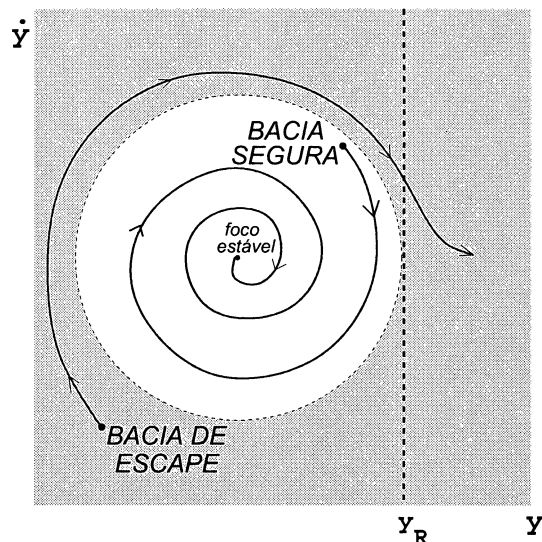


Figura 6.6: Esquema do plano de fase para um sistema simplificado, com a finalidade de elucidar a estrutura geométrica da bacia segura. Um oscilador livre e amortecido, cuja mola rompe para uma deformação $y > y_R$, tem como bacia segura um círculo de raio y_R , centrado na origem. Os únicos estados possíveis são o foco estável e o escape.

não-caótico [Moon e Li 85]. Com a variação do parâmetro e a subsequente criação do comportamento caótico, correspondente à evolução das tangências heteroclínicas, a geometria fractal das fronteiras de bacia tende a persistir. Condições iniciais próximas aos cruzamentos heteroclínicos (formados pelas variedades estável e instável de um ponto de sela) geram transientes também intrincados, que tendem a interceptar com maior probabilidade a linha $y_1 = y_R$, fazendo assim com que seja *menor* a área da bacia segura. Tal comportamento também é semelhante ao verificado no problema do navio estimulado pelas ondas oceânicas [Thompson *et al.* 90].

A brusca redução da bacia segura para $f(B) \approx 0$ em $B \approx 3,75$ se deve a uma crise de fronteira. Para B ligeiramente inferior a B_{CR} , o estado caótico, de menor amplitude, coexiste com o foco de período 2. A destruição do atrator em $B = B_{CR}$ dá origem a longos transientes caóticos, que acabam por se encaminhar para o foco de período 2, cruzando assim, mais cedo ou mais tarde, a linha $y_1 = y_R$, e divergindo então para o infinito. Quanto aos poucos pontos restantes, que a simulação numérica interpreta como pertencentes à bacia segura, trata-se provavelmente de órbitas que também acabam por escapar, desde que se deixe que o programa computacional seja executado por um maior número de iterações.

Cabe ainda uma observação sobre a figura 6.5: é visível nos gráficos uma estreita faixa de bacia segura invadindo a região $y > y_R$, que se deve à aproximação exponencial do potencial de escape, exposta na subseção anterior. Nesse modelo, se o oscilador fosse inicializado com posição para baixo *além* de y_R , mas com velocidade *para cima*, a trajetória *poderia* convergir para um dos atratores. Fisicamente, o resultado não é relevante. Para o levantamento da área segura, introduz um erro de cerca de 1% da área total da janela.

Variação no coeficiente de amortecimento

Parte-se aqui do mesmo caso de referência tomado acima, que mostra a coexistência do estado caótico com o foco de período 2, sendo $\delta = 0,05$. Nesse caso, dando um sentido físico à erosão da bacia de segurança, espera-se que uma *redução* na dissipação cause também uma redução na área segura, pois a energia do sistema é consumida mais lentamente, permitindo assim seu acesso a regiões do plano de fase mais afastadas da origem, e aumentando portanto a probabilidade de uma trajetória cruzar a linha $y_1 = y_R$. É repetido o mesmo procedimento adotado acima para a variação da amplitude de excitação, e para a mesma janela do plano de fase, agora mantendo fixa a amplitude da excitação ($B = 3,0$) e fazendo variar o amortecimento no intervalo $0,120 > \delta > 0,039$. A figura 6.7 mostra o resultado obtido.

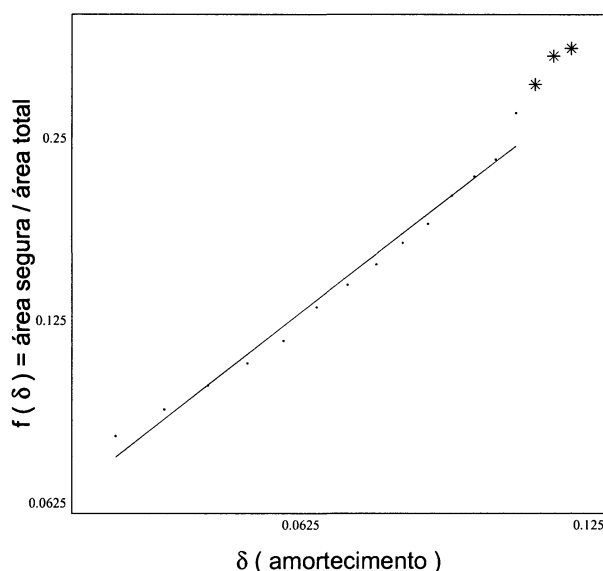


Figura 6.7: *Decréscimo da área percentual da bacia segura com a redução do coeficiente de amortecimento, que respeita, no intervalo $1,05 > \delta > 0,04$, a lei de potência $f(\delta) = 3,8\delta^{1,22}$ (as escalas são logarítmicas).*

O decréscimo da área segura com o amortecimento respeita uma lei de potência, agora com expoente positivo, num intervalo bem definido. A brusca queda para $f(\delta) \approx 0$ em $\delta \approx 0,04$ se refere à crise de fronteira estudada na seção (5.4): o atrator caótico é destruído, e todas as condições iniciais geram trajetórias que acabam por ser conduzidas rumo ao foco de período 2, cruzando finalmente a linha $y_1 = y_R$ (o diagrama de bifurcações está omitido na figura, pelo fato não oferecer informações além daquelas já exploradas no item anterior).

A erosão da bacia segura é mostrada em etapas, na figura 6.8. A evolução com a diminuição de δ pode ser acompanhada pelo gráfico da figura 6.7.

A incursão de filamentos mostrada na figura 6.8 é também relacionada a cruzamentos heteroclínicos. No modelo do navio estimulado por ondas oceânicas, seu aparecimento pode ser inclusive previsto, com base no critério de Melnikov [Thompson *et al.* 90].

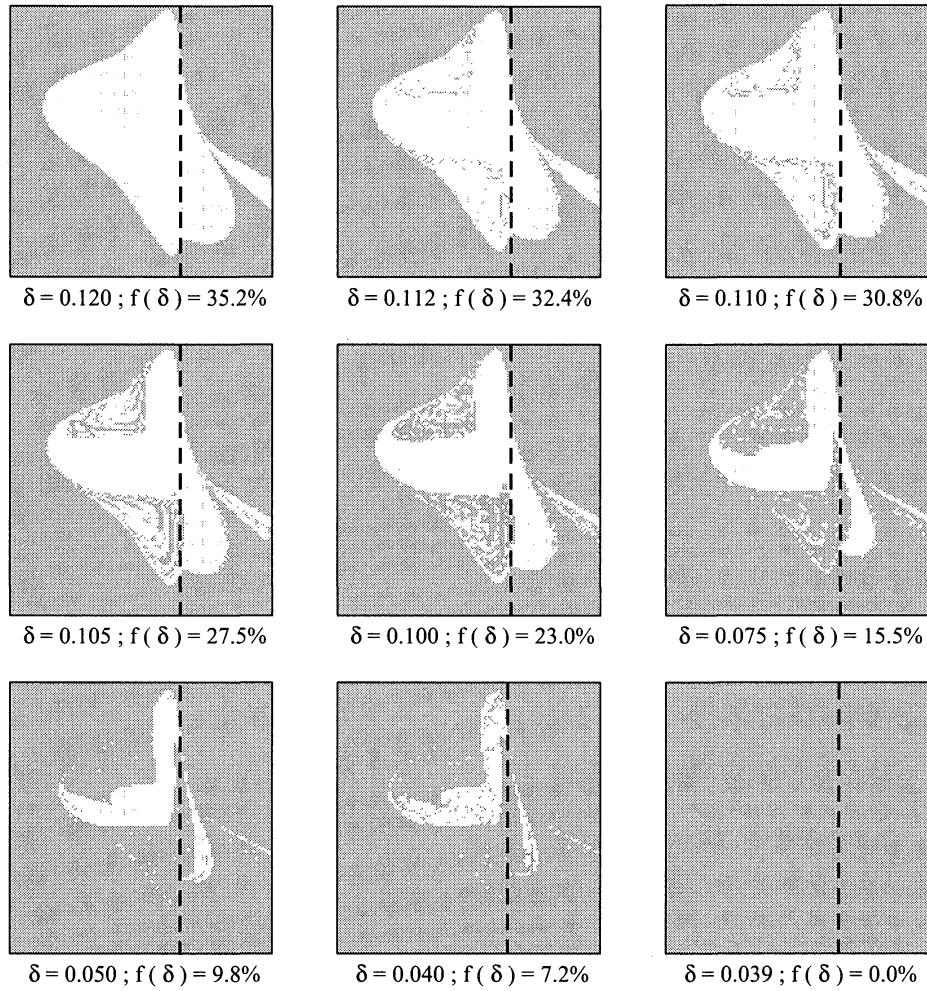


Figura 6.8: *Etapas da erosão da bacia segura com o aumento do coeficiente de amortecimento. Compare-se com o gráfico da figura 6.7.*

Varição na deformação de ruptura

Tomando o mesmo caso de referência dos dois itens anteriores, mantendo fixos $\delta = 0,05$ e $B = 3,0$, é variada agora a deformação de ruptura, a partir do valor $y_R = 0,5$. Espera-se, interpretando fisicamente, que uma *redução* no limite de ruptura cause também uma redução na área de segurança, pois o número de trajetórias que interceptam a linha $y_1 = y_R$ tende a ser maior. Mais uma vez procede-se a pesquisa numérica da área da bacia segura, ainda para a mesma janela do plano de fase, no intervalo de variação $0,60 > y_R > 0,03$, obtendo como resultado a figura 6.9.

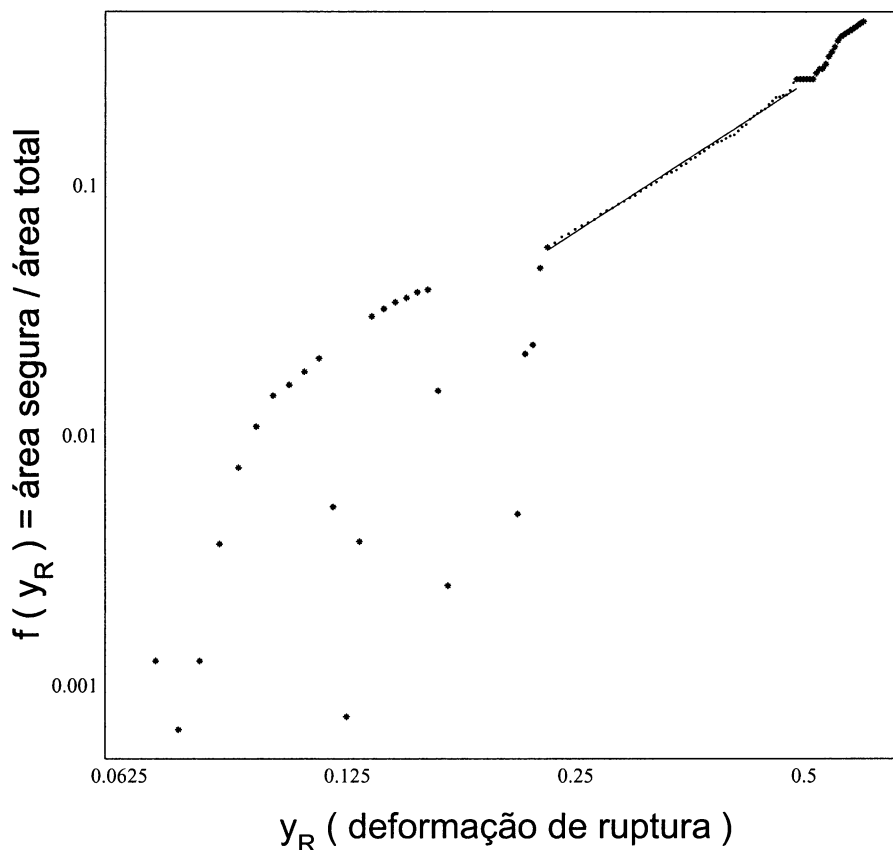


Figura 6.9: *Decréscimo da área percentual da bacia de segurança com a redução da deformação de ruptura. No intervalo $0,490 > y_R > 0,030$, a curva se ajusta à lei de potência $f(y_R) = y_R^{+1.97}$ (as escalas são logarítmicas).*

O decréscimo da área segura com a deformação de ruptura também respeita, num determinado intervalo, uma lei de potência com expoente positivo. Nota-se que a curva apresenta marcadamente algumas descontinuidades, indicando *quedas bruscas* na área da bacia segura. Aparece também como um pequeno *patamar* em $0,515 > y_R > 0,490$, ao longo do qual a essa área parece se manter inalterada. Tais pormenores não estão sendo investigados neste trabalho, podendo talvez oferecer material para uma pesquisa futura.

A erosão da bacia segura é mostrada em etapas, na figura 6.10, acompanhando o

gráfico da figura 6.9.

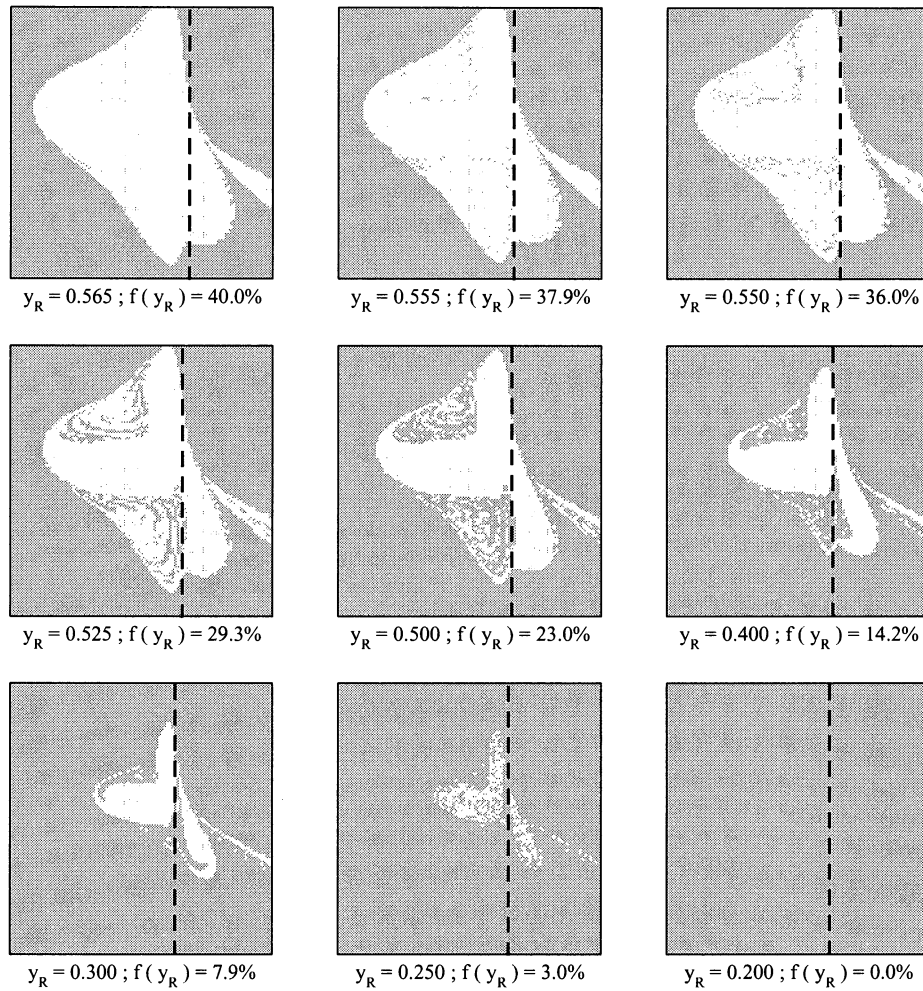


Figura 6.10: *Etapas da erosão da bacia segura com a redução da deformação de ruptura. Compare-se com o gráfico da figura 6.9.*

É curioso observar que, neste caso, a erosão também se dá pela incursão de filamentos na bacia segura, mas a anulação da área segura não pode ser explicada pela destruição do atrator caótico numa crise de fronteira. A princípio, para que qualquer condição inicial leve ao colapso do oscilador linear por partes, é necessário que a linha $y_1 = y_R$ se aproxime muito da origem do plano de fase. Contudo, essa situação discorda de um caso real, pois se referiria a uma mola demasiadamente frágil.

6.1.3 Resumo sobre o caso de escape e comentários finais

Nesta seção, foi suposto que o oscilador linear por partes pode colapsar, caso o deslocamento vertical ultrapasse um limiar de ruptura da mola unilateral, correspondendo, no

caso da ponte pênsil estimulada pelo vento, a uma deflexão no centro do vão que excede a deformação máxima admissível para o tirante que conecta a viga ao cabo principal.

A caracterização do escape não está focalizada em aspectos concernentes aos diferentes atratores que coexistem para um dado conjunto de parâmetros, e sim ao comportamento transiente. Assim, as condições iniciais que não levam o sistema ao colapso constituem a *bacia de segurança*, que engloba órbitas que convergem para um ou mais atratores.

A área percentual da bacia segura, numa região demarcada do plano de fase, mostra uma redução pronunciada conforme um parâmetro é variado, por incursão de filamentos da bacia de escape no corpo da bacia segura, sendo este processo chamado de *erosão de bacia*. A geometria da fronteira da bacia segura evolui de suave para fractal, se referindo a trajetórias transientes com maior probabilidade de cruzar o limiar de ruptura no plano de fase. O aparecimento de uma tal estrutura está associado a tangências heteroclínicas entre as variedades estável e instável de um ponto de sela.

Tendo sido testado o comportamento da bacia segura com a variação da amplitude da excitação, do coeficiente de amortecimento, e da deformação de ruptura, são encontradas leis de potência, válidas em intervalos bem definidos, de maneira geral associados à evolução das órbitas coexistentes.

Os casos que envolvem crise de fronteira têm um interesse especial, pois um comportamento aparentemente seguro pode ser na realidade um longo transiente caótico, que acaba por levar ao colapso do sistema.

Uma comparação entre as figuras 6.10, 6.8 e 6.5 revela estruturas similares no plano de fase durante o processo de erosão da bacia segura, para a variação dos três parâmetros estudados. Uma possibilidade interessante de continuidade para essa pesquisa consiste na investigação da bacia de segurança num *plano de parâmetros*, para uma condição inicial. Existem resultados deste estudo para o modelo do navio sujeito a ondas oceânicas, no *plano de excitação*, cujas coordenadas são a frequência e a amplitude da excitação externa; a bacia segura neste plano também mostra padrões de filamentos incursivos [Senjanovic e Fan 95].

6.2 Adição de ruído

6.2.1 Considerações iniciais

Até a seção precedente, para investigação do oscilador linear por partes, foi adotado um modelo matemático totalmente *determinístico*. Em tal cenário, chegaram a ser discutidas situações de *comportamento caótico*, e também de *obstrução à previsibilidade* devida a estruturas intrincadas de fronteiras de bacia. Contudo, tais resultados se referem a um sistema no qual, uma vez conhecido o seu estado num certo instante, o estado no instante subsequente fica *absolutamente determinado*. Os problemas de imprevisibilidade se referem sempre à evolução temporal para *tempos maiores*, não havendo estocasticidade *inerente* às equações.

O objetivo da presente seção é introduzir, no mesmo modelo, um termo de *pequena intensidade* que caracteriza a perda parcial desse determinismo, e investigar, entre alguns aspectos dinâmicos *globais* já estudados, quais sobrevivem a este acréscimo (por exemplo,

no caso de multiestabilidade, a configuração das fronteiras de bacia).

Há uma motivação física para a introdução deste termo (dito “ruído”), tanto para um oscilador mecânico linear por partes amortecido e forçado como para a ponte pênsil estimulada pelo fluxo do vento. Tal termo inclui no modelo os efeitos combinados de pequenas irregularidades na excitação periódica (por um motor, ou pelo fluxo do vento), bem como de flutuações nos próprios parâmetros do sistema, por exemplo, referentes à não-homogeneidade das propriedades dos materiais, ou ainda, no coeficiente de amortecimento viscoso. Tal inclusão, mesmo com pequena intensidade, pode causar modificações drásticas nos resultados obtidos sem ruído, e é importante que seu efeito seja considerado quando da aplicação do modelo a problemas de engenharia.

6.2.2 Modelamento matemático

Em termos de simulação computacional, o termo de ruído é somado à segunda equação diferencial do sistema 2.10, na forma de um número adimensional R_t de baixa ordem de grandeza, cujo valor é *alterado* a cada passo da integração numérica. Arbitra-se uma *amplitude de ruído* R , de forma que se tenha sempre $-R < R_t < +R$. Os valores instantâneos R_t são obtidos a partir de uma função $A(t)$ que apresente saída *pseudo-aleatória*, geralmente normalizada no intervalo $-1, 0 < A(t) < +1, 0$. Assim, a cada passo da integração numérica referente a um instante t , é somada à equação a quantidade $R_t = A(t)R$.

Existem diversos algoritmos que fornecem funções com saída pseudo-aleatória. Dependendo do propósito, se faz necessário atender a uma série de requisitos quanto à distribuição dos valores $A(t)$. No caso em estudo, a preocupação não é descrever propriedades estatísticas da *resposta* do oscilador linear por partes ao estímulo aleatório. O interesse aqui se concentra em observar as alterações de estrutura global no espaço de fase, decorrentes da introdução de uma pequena perturbação não-periódica no sistema. Assim, é aceitável a adoção dos valores de saída de uma relação recursiva que engendre uma série caótica, por exemplo, o *mapa logístico* $x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t)$, com t inteiro, $0 < x_t < 1$, e $\mu = 4, 0$ para que, além de a saída ser caótica, tenha-se o atrator abrangendo todo o intervalo $0 < x_{t+1} < 1$ [Alligood *et al.* 96] (p.17). Assim, é apenas *imitada* a influência de um termo ruidoso. Uma vantagem da adoção desse modelo diz respeito a evitar problemas numéricos com a rotina de integração utilizada, que, trabalhando com passo variável, eventualmente *recua* no tempo. Um gerador de números perfeitamente pseudo-aleatórios inviabilizaria o uso desse integrador. Mas como o sistema continua sendo determinístico para curto prazo, pois foi simplesmente acoplada uma entrada caótica às equações, o programa computacional é executado normalmente, e os objetivos em interesse podem ser atingidos. Para a normalização no intervalo desejado, basta que seja feito $A(t) = \frac{1}{2} - x_t$.

6.2.3 Salto entre bacias (“basin-hopping”)

Imagine-se uma órbita típica do mapa estroboscópico evoluindo no tempo sobre a bacia de atração de um dos focos estáveis. Na ausência total de ruído, a órbita estará sempre aprisionada na bacia, e convergirá assintoticamente para o foco. Isso não pode mais ser afirmado se for adicionado ao sistema um ruído de certa intensidade. Quando a bacia

é demasiado *delgada*, a trajetória pode, após visitar temporariamente a proximidade do atrator, ser desviada para um ponto no plano de fase que pertence à bacia de outro atrator. Assim, o ruído *conecta* as diferentes bacias. Caso apresente várias bacias delgadas, o sistema pode não se estabilizar jamais, alternando comportamentos *aparentemente periódicos* com *transientes caóticos*, todos com tempos de duração imprevisíveis. Este fenômeno, conhecido como *salto entre bacias* (“*basin-hopping*”), já foi constatado em outros sistemas dinâmicos multiestáveis com adição de ruído, como o oscilador de Duffing [Frey e Simiu 95], [Arecchi *et al.* 85] e o rotor pulsado [Kraut *et al.* 99], [Macau e Grebogi 99]. O salto entre bacias não se enquadra nem num comportamento totalmente aleatório, nem completamente ordenado. Nesse sentido, a adição de um pequeno ruído confere ao modelo o caráter de *sistema complexo* [Feudel e Grebogi 97], possibilitando inclusive o uso de métodos de *controle de complexidade*, que envolvem a aplicação de pequenas perturbações que intentam *redirecionar* a trajetória, mantendo-a próxima de um dos estados alternativos por um tempo arbitrariamente longo, ou também abreviando a duração dos transientes caóticos [Macau e Grebogi 99], [Feudel e Grebogi 97].

Qual o efeito esperado por se adicionar ruído ao oscilador linear por partes que modela a ponte pênsil, num caso multiestável? Nos exemplos aqui estudados, a simulação numérica mostra que as trajetórias de fase *não saltam* entre os atratores por um tempo *indefinidamente longo*. Ao invés disso, o que se verifica é que, se inicializadas em uma bacia delgada, após se aproximarem do atrator e serem desviadas pelo ruído, são conduzidas geralmente para um atrator com bacia mais larga, em cuja *proximidade* transitam *permanentemente*; ou seja, a menos do pequeno ruído, atingem uma relativa estabilidade. A figura 6.11 mostra um exemplo, com os parâmetros do caso não-perturbado que consta na figura 3.13 [d], tendo sido escolhido o baixo amortecimento ($\delta = 0.001$) para favorecer a coexistência de muitos atratores. Uma *única* trajetória é iniciada próximo ao foco estável de período 5; os pontos estroboscópicos da evolução temporal se distribuem inicialmente na proximidade desse atrator, sendo em seguida direcionados para o foco de período 3; por este ter uma bacia mais larga, a amplitude do ruído não é suficiente para que a trajetória transponha sua fronteira, sendo assim *aprisionada* nessa região para $t \rightarrow \infty$.

A situação da figura 6.11 mostrou-se típica para o sistema em estudo, inclusive para coeficientes de amortecimento muito mais baixos, ou seja, as órbitas acabam aprisionadas permanentemente na vizinhança de um dos focos do caso não-perturbado. A menos do pequeno ruído, pode-se considerar, portanto, que em termos práticos a órbita se estabilizou, e é aceitável considerar este estado final como se fosse um atrator. Assim, o sistema perturbado se caracteriza pela *persistência* da maioria dos atratores. Contudo, o estudo das *bacias de atração* desses estados permanentes merece cuidados especiais.

Por exemplo, para valores muito pequenos de R , a configuração das bacias praticamente não é afetada. Quase todas as condições iniciais seguem o mesmo destino que seguiriam no caso não-perturbado. O efeito do ruído só se manifesta por uma estreita *faixa de indeterminação*, centrada na fronteira suave do caso não-perturbado, ou seja, não se pode prever para qual dos estados finais converge uma condição inicial tomada dentro dessa faixa. Gráficos como os da figura 3.13 ficariam com o mesmo aspecto global, mas as linhas de fronteira pareceriam menos nítidas. Sobre essas *faixas de indeterminação*, cabe

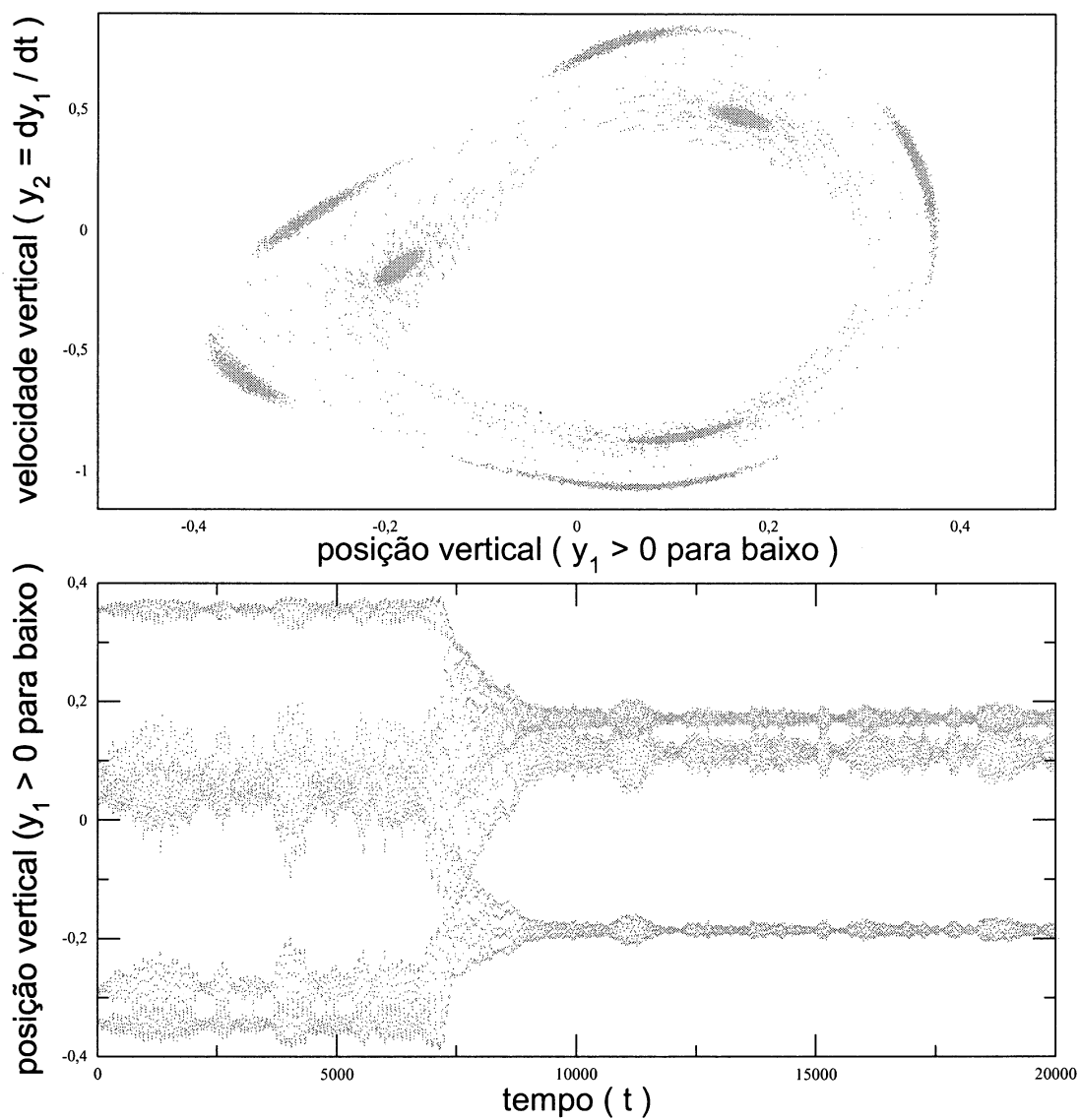


Figura 6.11: *Condição inicial na bacia de um atrator de período 5 para o oscilador linear por partes com ruído, com a órbita do mapa estroboscópico que, após visitar este atrator, é desviada para outro, de período 3, com bacia mais larga. O salto entre bacias não chega a ocorrer, pois a órbita praticamente se estabiliza no novo estado.*

uma observação importante, pois corre-se o risco de uma interpretação precipitada dos resultados da simulação numérica. Esses resultados mostram a faixa de indeterminação como um conjunto desconexo de pontos pertencentes a cada uma das duas bacias, formando um padrão no plano de fase. Mas a simulação não oferece um resultado confiável para um ponto *individual* da faixa de indeterminação. As únicas conclusões viáveis são aquelas obtidas por levantamentos *estatísticos*, por exemplo, se a alteração na configuração nas fronteiras é acompanhada por variações nas áreas totais das diferentes bacias, como ocorre no caso da *erosão*, tratada na seção (6.1). Para um pequeno R , não se espera que as *áreas* das bacias sejam significativamente alteradas.

Com o aumento progressivo de R , cresce a *largura* dessa faixa de indeterminação. Esse processo tem continuidade até um valor-limiar de R , que indica o início da destruição de um atrator. Acima desse limiar, um aumento em R causa, ao lado do aumento na largura da faixa de incerteza, um decréscimo na área da bacia mais delgada. O processo continua até que o atrator seja inteiramente destruído.

Pode-se então dizer que o aumento da amplitude do ruído R faz diminuir o número de atratores coexistentes. Os atratores mais passíveis de destruição são aqueles com bacias mais delgadas, que costumam estar associados a órbitas com período mais alto. Assim, a área da bacia do foco central de período 1 tende a *aumentar* com o aumento de R .

Com base nos argumentos acima, na próxima subseção são investigadas algumas propriedades dinâmicas decorrentes da adição de ruído ao oscilador linear por partes amortecido e forçado.

6.2.4 Influência da amplitude do ruído na multiestabilidade

Conforme justificado no final da subseção anterior, será estudado aqui o comportamento das bacias de atração, conforme é variada a amplitude do ruído adicionado ao sistema. É interessante retomar o caso [c] da figura 3.13. Assim, os resultados já explorados no capítulo (4) podem servir de referência para os que forem obtidos nesta subseção. Trata-se de um caso de coexistência de *quatro* atratores com períodos diferentes, facilmente visualizável, o que favorece a interpretação em termos de comportamento dinâmico.

Na figura 6.12, uma janela escolhida na região central da figura 4.6 é apresentada para seis valores progressivamente crescentes da amplitude de ruído R .

As conjecturas expostas no parágrafo anterior são confirmadas pela figura 6.12: fica aparente a evolução com o parâmetro R , que pode ser distingüida da *erosão* de bacias já estudada na seção (6.1). Em primeiro lugar, aqui a geometria da fronteira *não segue* o padrão de filamentos incursivos que, nos casos estudados com escape, adentra na bacia segura à medida que um parâmetro do sistema é variado; o que se observa é um padrão em pontos aleatoriamente distribuídos, que compõem a *faixa de indeterminação*, cuja *largura* cresce com o aumento da amplitude do ruído R . Outro aspecto que diferencia este caso daquele do escape é que, na seção (6.1), variações dos parâmetros correspondentes a uma caracterização mais crítica do potencial de escape tendem a *diminuir* a área da bacia segura. Aqui, para R abaixo de um limiar (na figura 6.12, abaixo de 0,040), não se verificam alterações significativas nas *áreas* das diferentes bacias, apenas na configuração de suas fronteiras. E para R acima do limiar, a caracterização mais crítica do ruído tende

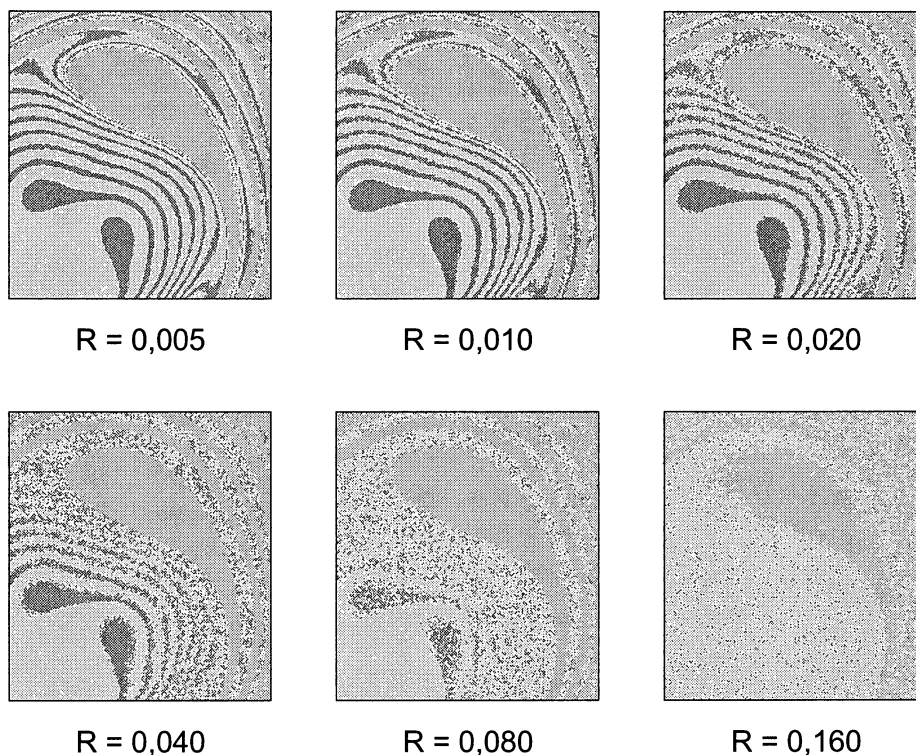


Figura 6.12: *Efeito do aumento da amplitude de ruído R nas bacias da atração para o caso multiestável da figura 4.6. As curvas suaves das fronteiras de bacia são convertidas em faixas de indeterminação, cuja largura aumenta com a amplitude do ruído. A multiestabilidade do sistema persiste, mas é agravada a obstrução à previsibilidade, tratada, para o caso não-perturbado, na subseção (4.2.4). Para valores de R além de um limiar (no caso, 0,040), o atrator começa a ser destruído.*

a *aumentar* a área da bacia correspondente à resposta harmônica (essa bacia será referida, a partir daqui, como “bacia segura”; apesar de se tratar de um caso sem possibilidade de escape, a resposta harmônica seria a solução menos passível de colapso numa situação em que fossem combinados a adição de ruído com o potencial de escape).

Para uma análise em termos quantitativos, toma-se o caso $R = 0,040$ da figura 6.12 e investiga-se a *fração* de condições iniciais seguras para valores de parâmetro logo acima dele (analogamente ao caso estudado na seção (6.1), essa quantidade é proporcional à área da bacia segura). As bacias aparecem na figura 6.13, e o ajuste da lei de potência na figura 6.14.

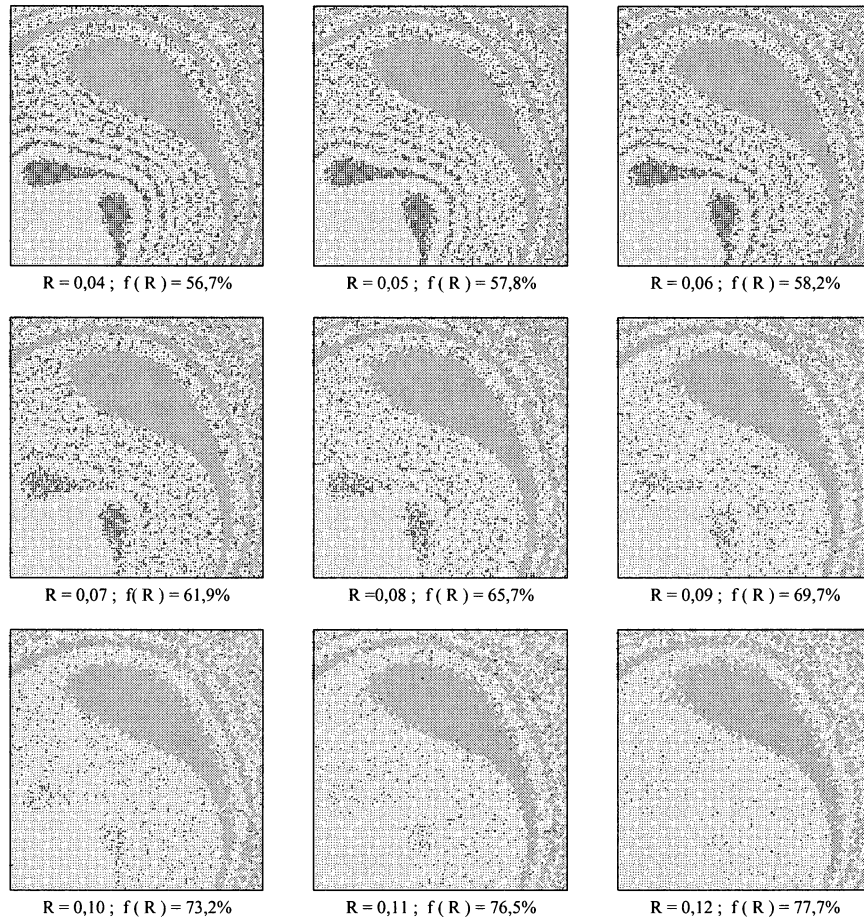


Figura 6.13: *Destruição de um atrator no plano de fase devida ao aumento da amplitude de ruído R num pequeno intervalo próximo ao valor-limiar. O aumento da área da bacia segura respeita uma lei de potência, mostrada na figura 6.14.*

Na figura 6.14 fica clara, num intervalo bem definido da variação de R , a validade de uma lei de potência. Quanto mais intenso é o ruído, menor é a probabilidade de se inicializar o oscilador e vê-lo convergir para um atrator de alto período.

Outra possibilidade interessante para continuidade do trabalho iniciado nesta tese de doutoramento é a determinação numérica da *dimensão por contagem de caixas* da fronteira da bacia segura, o que forneceria maiores informações sobre sua estrutura geométrica. E o cálculo seria repetido para *diferentes sementes* do ruído, testando assim a robustez do

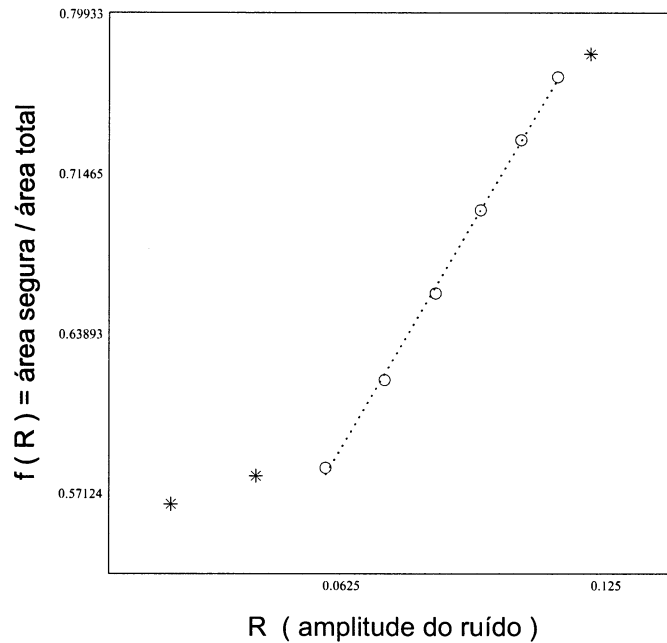


Figura 6.14: Variação da área da bacia segura com a amplitude de ruído R , que no trecho $0,06 < R < 0,11$ respeita a lei de potência $f(R) = 2,1R^{0,46}$ (as escalas são logarítmicas).

resultado. Num passo posterior, poderia ser investigada a evolução dessa dimensão com o aumento da amplitude do ruído. Estes são itens a serem desenvolvidos em pesquisas futuras.

6.3 Acoplamento de dois osciladores

6.3.1 Motivação física

Nesta seção é exposto um estudo preliminar, com o objetivo de abrir caminho para a investigação de uma nova gama de padrões dinâmicos a serem explorados em trabalhos futuros. Trata-se de um sistema amortecido e periodicamente forçado, composto por *dois* osciladores, cada um com inércia e elasticidade próprias, mas estando ligados por uma terceira mola, cuja curva de resposta é *linear por partes*.

Um exemplo de motivação física para este novo modelo pode ser encontrado na própria ponte pênsil, desde que se passe a considerar a deformabilidade do *cabo principal*. Assim, tanto o cabo quanto a viga ondulam transversalmente quando estimulados por esteiras de vórtices criadas pelo fluxo do vento. Como em toda a sua extensão os dois corpos são conectados pelos *tirantes*, cada um destes transmite as oscilações de um segmento da viga para um correspondente segmento do cabo (e também do cabo para a viga), mas essa transmissão só ocorre durante as situações em que o tirante esteja *tracionado*. Tem-se assim um sistema que, globalmente, apresenta comportamento não-linear. O amortecimento viscoso, a princípio, não é o mesmo para os dois corpos, devido às diferentes propriedades

aerodinâmicas do cabo e da viga. Quanto à excitação externa, o fluxo lateral do vento causa respostas de grandezas distintas ao contornar os perfis dos dois corpos, levando em conta principalmente a diferença entre as massas por unidade de comprimento. Isso permite uma primeira simplificação ao serem escritas as equações diferenciais: o termo de excitação externa pode ser ignorado na equação da viga, posto que o efeito provocado pelo fluxo lateral do vento é muito maior nos cabos (pode-se falar, inclusive, na transferência de vibrações das torres, e até dos vãos laterais). Além disso, o efeito do *peso próprio* pode ser negligenciado para o cabo, e assim sua equação não precisa incluir o termo de *carregamento* que consta na equação da viga. Finalmente, mantendo a seleção do *primeiro modo flexional*, o sistema é reduzido a um par de osciladores acoplados [Lazer e McKenna 90].

Este sistema é modelável matematicamente por um par de equações diferenciais de segunda ordem, sendo uma delas não-autônoma. O deslocamento relativo entre os dois corpos, multiplicado pela elasticidade do tirante, constitui o *termo de acoplamento*. Este termo deve constar em ambas as equações, posto que o acoplamento, neste caso, é *bidirecional*, ou seja, os movimentos dos dois corpos se afetam mutuamente. A dinâmica é representada num espaço de fase de 5 dimensões (duas posições, duas velocidades e o tempo), e portanto, o *mapa estroboscópico* tem dimensão 4, sendo os atratores desse mapa visualizáveis por suas projeções bidimensionais.

6.3.2 Modelo matemático

O cabo principal é tratado como uma *corda vibrante*, amortecida e periodicamente forçada, sendo, para os fins aqui propostos, assumida como *retificada* na condição de equilíbrio [Lazer e McKenna 90]:

$$M_1 v_{tt} - T v_{xx} + \delta_1 v_t = k(u - v)^+ + B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin(\omega t), \quad (6.4)$$

sendo v a deflexão instantânea do cabo (tomada como positiva para baixo), x a coordenada horizontal e t o tempo; os termos têm unidades de força por unidade de comprimento, sendo L a extensão do vão central; M_1 é a massa do cabo, T a força de tração, e δ_1 o coeficiente de amortecimento viscoso; ω e B_0 são a frequência e a amplitude da excitação externa (a justificativa do perfil senoidal em x do termo de excitação está esclarecida na subseção (2.1.4)); k é a constante elástica associada aos tirantes, e ainda se tem $(u - v)^+ = \max\{(u - v), 0\}$, sendo u a deflexão instantânea *da viga*, também tomada como positiva para baixo (o termo de elasticidade nessa equação tem sinal *positivo*, pois o cabo sofre a ação de uma força restauradora *para baixo*, exercida pelo tirante). A corda tem extremidades fixas, portanto as condições de contorno de 6.4 são $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$.

A equação para a viga segue o modelo 2.2, *sem* o termo de excitação, podendo ser escrita na forma:

$$M_2 u_{tt} + E I u_{xxxx} + \delta_2 u_t = -k(u - v)^+ + W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (6.5)$$

que, além dos termos análogos aos de 6.4, inclui o carregamento W_0 , o módulo de Young E , e o momento de inércia I ; aqui, o termo de elasticidade tem sinal *negativo*, pois o tirante exerce sobre a viga uma força restauradora *para cima*. As condições de contorno para a

equação da viga, a qual é apoiada nas extremidades, são $u(0) = 0$, $u(L) = 0$, $u_{xx}(0) = 0$ e $u_{xx}(L) = 0$.

Pode-se dividir 6.4 por M_1 e 6.5 por M_2 ; definindo novas constantes, é obtido o sistema:

$$\begin{aligned} v_{tt} - c_1 v_{xx} + \delta v_t &= k_1(u - v)^+ + B \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}(\omega t); \\ u_{tt} - c_2 u_{xxx} + \delta u_t &= k_2(u - v)^+ + W \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

o qual sofreu mais uma simplificação, ao ser adotada uma única constante de decremento logarítmico para o conjunto, assumindo que $\frac{\delta_2}{M_2} \approx \frac{\delta_1}{M_1} \approx \delta$. Na seqüência, preparando o sistema mecânico para que seja reduzido a um par de osciladores acoplados, procede-se a separação de variáveis, na forma

$$\begin{aligned} v(x, t) &= z(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right); \\ u(x, t) &= y(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \end{aligned} \quad (6.7)$$

e levando as derivadas espaciais e temporais em 6.6, tem-se finalmente, após outra redefinição de constantes,

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\delta\dot{z} + a_1 z &= k_1(y - z)^+ + B \operatorname{sen}(\omega t); \\ \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + a_2 y &= -k_2(y - z)^+ + W, \end{aligned} \quad (6.8)$$

que modela a dinâmica do par de osciladores, ilustrado na figura 6.15.

Na subseção seguinte, são encaminhadas as modificações necessárias para realizar a integração numérica do sistema de equações diferenciais 6.8 e, posteriormente, serão apresentados alguns resultados obtidos por essa integração.

6.3.3 Mudança de variáveis para a integração numérica

As duas equações do sistema 6.8 são de segunda ordem, e além disso, a primeira delas é não-autônoma. Mediante uma mudança de variáveis, análoga àquela empregada na subseção (2.2.2), o sistema referente aos dois osciladores acoplados pode ser escrito na forma de cinco equações de primeira ordem, autônomas:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2\delta z_2 - a_1 z_1 + k_1(z_4 - z_1)^+ + B \operatorname{sen}(\omega z_3) \\ \dot{z}_3 &= 1 \\ \dot{z}_4 &= z_5 \\ \dot{z}_5 &= -2\delta z_5 - a_2 z_4 - k_2(z_4 - z_1)^+ + W. \end{aligned} \quad (6.9)$$

A integração numérica do sistema 6.9, por meio da subrotina LSODA [Hindmarsh 83], fornece soluções na forma de séries temporais contínuas de z_1 , z_2 , z_4 e z_5 (z_3 é o tempo; o mapeamento estroboscópico seleciona os estados que satisfazem $z_3 = \frac{2n\pi}{\omega}$, com $n =$

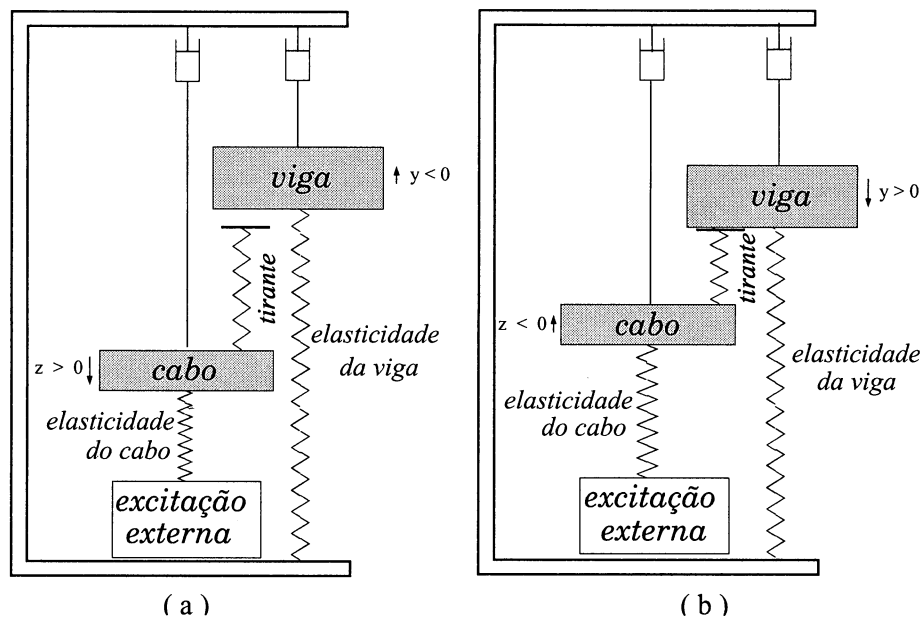


Figura 6.15: Modelo mecânico do par de osciladores acoplados por uma mola unilateral, motivado, no exemplo da ponte pênsil, pela transmissão de esforços exercida pelos tirantes, entre o cabo principal e o tabuleiro. O posicionamento vertical do cabo e da viga está invertido na figura, para facilitar a representação esquemática da mola unilateral. Na situação representada em (a), os dois componentes estão respondendo apenas às suas próprias constantes elásticas; o acoplamento pela elasticidade do tirante só ocorre durante situações como a representada em (b).

0, 1, 2...). As soluções são aqui analisadas com auxílio de retratos de fase obtidos por duas das projeções do atrator, especificamente sobre os planos $z_4 z_5$ (posição da viga \times velocidade da viga) e $z_4 z_1$ (posição da viga \times posição do cabo). O esboço na figura 6.16 esclarece a situação.

Na subseção seguinte, são arbitrados valores para os parâmetros do sistema 6.9 e para as condições iniciais, e alguns resultados são apresentados e discutidos.

6.3.4 Algumas soluções numéricas e possibilidades para explorar o sistema acoplado

Coexistência de um atrator periódico com um quase-periódico

Para encontrar soluções numéricas do sistema de dois osciladores acoplados por uma mola unilateral, periodicamente forçado e amortecido, foram adotados para os parâmetros valores próximos aos dos exemplos encontrados na bibliografia [Lazer e McKenna 90]. Em um amplo intervalo de variação desses parâmetros, foi constatada a *coexistência* de dois estados assintóticos.

Um desses dois estados coexistentes é *periódico*, com frequências iguais para o cabo e para a viga (respostas harmônicas), porém com amplitudes muito diferentes (dez ou vinte vezes menor para a viga).

O estado alternativo é *quase-periódico*, com frequências diferentes (resposta harmônica

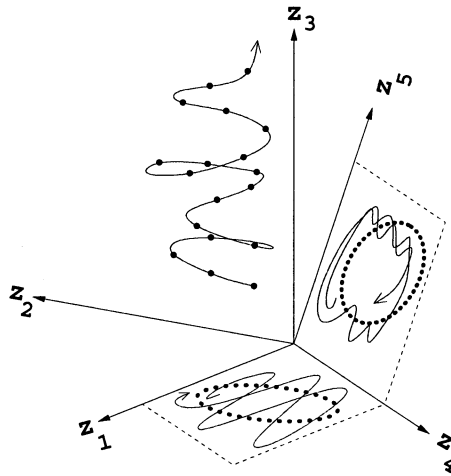


Figura 6.16: *Esquema do espaço de fase de 5 dimensões referente ao par de osciladores acoplados que modela a ponte pênsil nesta seção. O cabo principal é estimulado periodicamente pelo vento e transmite esforços ao tabuleiro através dos tirantes. No estado assintótico, a evolução do sistema em tempo contínuo segue a trajetória esboçada na figura. As variáveis são a posição e velocidade vertical do cabo (z_1, z_2), da viga (z_4, z_5), e também o tempo (z_3). No caso exemplificado, trata-se de uma solução quase-periódica, como indicam as projeções nos planos z_4z_5 e z_4z_1 . O mapeamento estroboscópico, nas projeções, resulta em curvas fechadas, que são densamente preenchidas para $t \rightarrow \infty$.*

para o cabo e sub-harmônica para a viga, numa relação tipicamente de seis para um), agora com amplitudes praticamente iguais (e maiores que as do caso periódico).

A figura 6.17 mostra as séries temporais da posição da viga e do cabo para as duas soluções coexistentes, cada uma delas associada a uma diferente escolha de condições iniciais.

Interpretando fisicamente as séries da figura 6.17, conclui-se que, de maneira geral, para pequenas energias de inicialização o movimento do conjunto é relativamente seguro, consistindo na oscilação moderada do cabo com a mesma frequência da excitação do vento, transmitida pelos tirantes à viga, que responde com amplitude muito pequena. Para energias mais altas, aparecem oscilações mais amplas do cabo, e, sobretudo, da viga. O caráter quase-periódico fica esclarecido nos retratos de fase da figura 6.18.

No exemplo investigado foram verificados, assim, tanto padrões de comportamento *periódico* como *quase-periódico*. Os resultados obtidos têm ligação com aspectos observáveis em pontes pênsis reais, como por exemplo o fenômeno conhecido como *cabos galopantes* [Lazer e McKenna 90].

Bacias de atração

Se uma dada condição inicial $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, z_{02}, z_{04}, z_{05}; z_{03} = 0)$, após o transiente, leva o sistema a um certo estado assintótico, \mathbf{z}_0 faz parte da *bacia de atração* do referido estado. Nessa situação, portanto, as bacias de atração não são superfícies planas, como no caso de um único oscilador, e sim *volumes 4-dimensionais*. A investigação da estrutura de

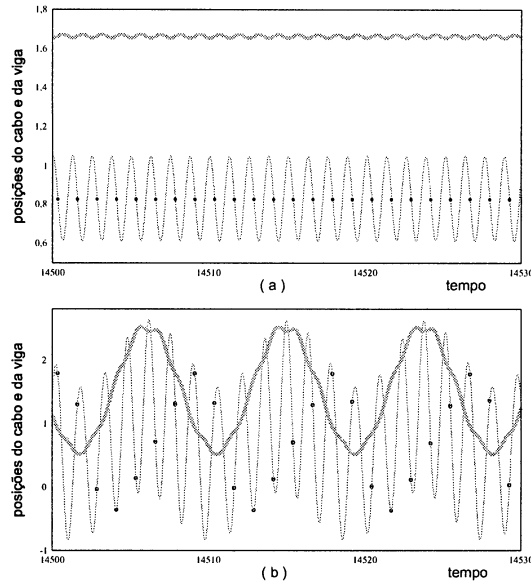


Figura 6.17: Séries temporais do cabo (linha fina) e da viga (linha espessa) para o sistema 6.9, com $a_1 = 10$, $a_2 = 0,1$, $k_1 = 10$, $k_2 = 1,0$, $\delta = 0,01$, $W = 1$, $\omega = 5$ e $B = 1$. Em (a), a resposta periódica (ciclo-limite), que pelo mapa estroboscópico corresponde a um ponto fixo (círculos). Em (b), a resposta quase-periódica. Compare-se com os retratos de fase da figura 6.18.

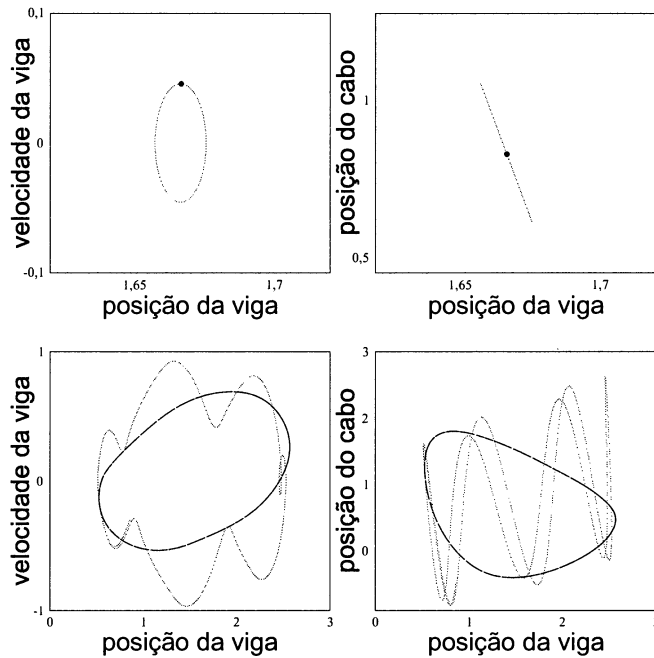


Figura 6.18: Retratos de fase para o sistema 6.9, com os mesmos parâmetros da figura 6.17. Para a resposta periódica, o mapa estroboscópico fornece um ponto fixo. Para o caso quase-periódico, os pontos estroboscópicos preenchem densamente uma curva fechada.

suas fronteiras deve ser conduzida cuidadosamente, por meio de *cortes bidimensionais*. Para cada corte (por exemplo, no plano z_4z_1), calibra-se as outras variáveis em valores fixos (por exemplo, $z_5 = 0, z_2 = 0$; nesse caso, cada condição inicial corresponderia a *deslocamentos* iniciais diferentes para o cabo e para a viga, mas sempre com *velocidade* inicial nula). Contudo, por uma única tentativa de aplicação deste procedimento, com uma escolha arbitrária das variáveis, existe pouca chance de que sejam reveladas estruturas interessantes do espaço de fase. Para uma análise conclusiva, podem ser necessários vários cortes, alterando-se tanto os *valores* das variáveis escolhidas, assim como *permutando* as variáveis do corte. A partir dos resultados obtidos, é possível verificar, por exemplo, se as fronteiras de bacia apresentam geometria fractal, e também levantar quantitativamente a obstrução à previsibilidade, num procedimento análogo ao da subseção (4.2.4), agora num sistema de dimensionalidade mais alta.

Comportamento caótico

Devido ao maior número de *graus de liberdade* do sistema acoplado, em relação a um único oscilador, espera-se que a presença de *comportamento caótico* seja verificada em intervalos mais amplos do espaço de parâmetros. Para conduzir as tentativas de encontrar um caso dentro desses intervalos, pode-se guiar pelo sentido físico dos parâmetros. Por exemplo, é conveniente exacerbar tanto a não-linearidade (k_1, k_2) como a perturbação causada pela excitação externa (B). Um dos resultados obtidos aparece na figura 6.19. É interessante a semelhança com uma solução caótica obtida, na bibliografia consultada, para o oscilador bilinear [Thompson *et al.* 83].

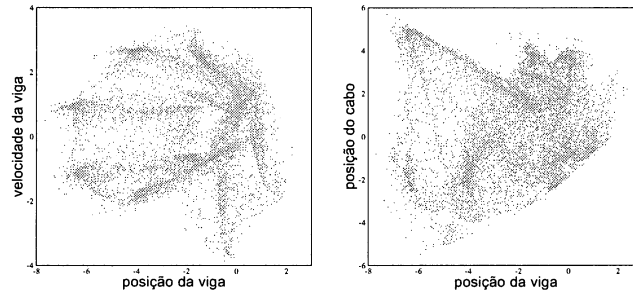


Figura 6.19: *Dois projeções dos pontos estroboscópicos para um estado permanente caótico do sistema acoplado, com os parâmetros $a_1 = 10$, $a_2 = 0,1$, $k_1 = 100$, $k_2 = 10$, $\delta = 0,05$, $W = 1$, $\omega = 5$ e $B = 10$.*

A partir de um caso caótico conhecido, como o da figura 6.19, pode-se, mediante a calibração gradativa de um parâmetro escolhido, investigar a *rota* pela qual o atrator caótico foi criado (*crise*, *intermitência*, *duplicação de períodos*, *etc*), com o auxílio de *diagramas de bifurcações*. Podem então ser investigadas propriedades estatísticas do sistema, expressas quantitativamente, por exemplo, na forma de leis de potência. Por outro lado, podem ser também procuradas regiões do espaço de parâmetros com *caos sincronizado*, identificável por uma projeção do atrator em forma de *linha reta* no plano z_4z_1 .

Diagramas de bifurcações

Aqui é preparado um exemplo de investigação sobre a criação do estado caótico mostrado na figura 6.19. Usando a técnica de *continuidade de órbita* (explicada na seção (4.1)), parte-se dos parâmetros listados na figura 6.19, escolhendo-se um deles (no caso, a amplitude da excitação B) para construir o diagrama. O resultado aparece na figura 6.20.

Além dos cuidados especiais requeridos pelo traçado de diagramas de bifurcações para um sistema multiestável, comentados na seção (4.1), deve-se alertar para as cinco dimensões do sistema ao calibrar as condições iniciais; espera-se também um maior grau de dificuldade, considerando que o sistema acoplado tem três parâmetros a mais.

Sincronização

Um aspecto importante a ser investigado no sistema acoplado se refere aos casos em que ocorre um “ajuste de ritmo” entre as oscilações da viga e do cabo, caracterizando padrões de *sincronização*.

Abordando estados *periódicos*, a sincronização é caracterizada, por exemplo, por respostas de *periodicidade idêntica*, como no caso da figura 6.17 [a], chamada então *sincronização de frequências*. Num caso particular, as séries temporais podem ter seus máximos ocorrendo em *instantes coincidentes*, tratando-se então de *sincronização de fases*. Existem também estudos sobre sincronização de fase para estados caóticos, definida por uma constante que *limita* a diferença entre as fases dos dois osciladores [Xiaofeng e Lai 00]. Caso as amplitudes também sejam correlacionadas, tem-se a chamada *sincronização completa*, verificável quando do acoplamento de sistemas idênticos [Alligood *et al.* 96]. É importante também estabelecer os limites para a *estabilidade* de um estado sincronizado *local*, ou seja, quando não dessincroniza se submetido a uma pequena perturbação; em caso de sincronização *global*, o sistema sempre sincroniza, independentemente da sua inicialização [Alligood *et al.* 96] (p.387). A pesquisa no espaço de parâmetros para identificação desses padrões, com as implicações dinâmicas decorrentes, oferece campo para um extenso trabalho futuro. A intenção aqui é apenas estabelecer objetivos para a continuidade da investigação do sistema.

Comentário final

Nesta subseção, foram apresentadas diversas possibilidades para continuidade deste trabalho, acoplando dois osciladores com uma mola linear por partes. Alguns entre os itens listados devem ser conduzidos paralelamente, pois os resultados parciais de um acabam sendo relevantes no desenvolvimento do outro. Especialmente nesse contexto, uma metodologia bem orientada pode fazer muita diferença quanto a um melhor aproveitamento do tempo de trabalho.

Naturalmente, os efeitos do acoplamento podem ser combinados com os da adição de ruído, ou da ruptura dos tirantes, oferecendo possibilidades para modelos progressivamente mais complexos, dos quais se espera emergirem comportamentos dinâmicos ainda não explorados. Outra simplificação, ao longo de todo este trabalho, foi considerar apenas o

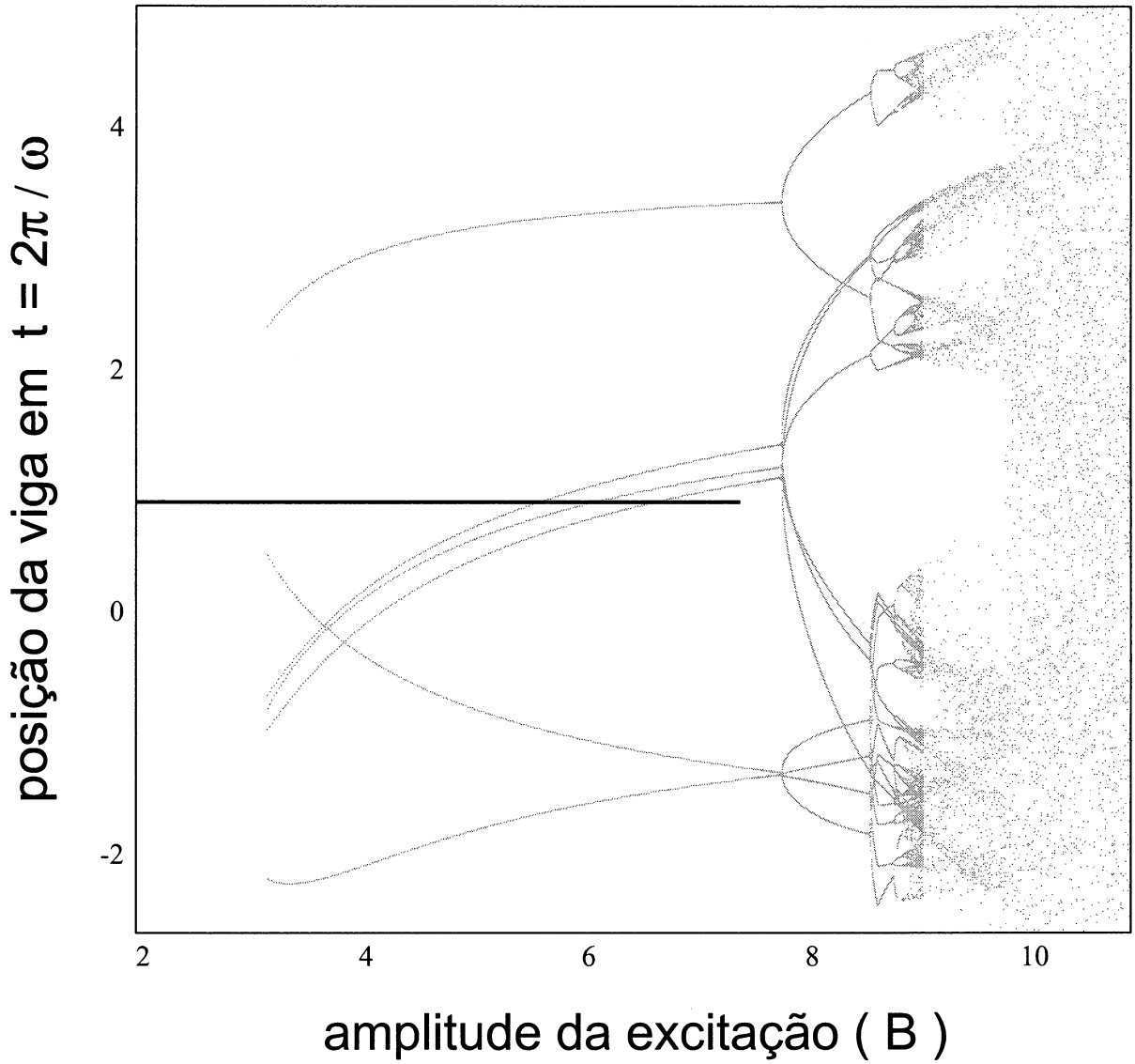


Figura 6.20: Diagrama de bifurcações para o sistema acoplado, mostrando a coordenada dos pontos estroboscópicos referente à posição da viga, variando com a amplitude da excitação B . Os demais parâmetros são mantidos nos valores $\omega = 5$, $a_1 = 10$, $a_2 = 0,1$, $k_1 = 100$, $k_2 = 10$, $\delta = 0,05$, $W = 1$. Nota-se a criação do atrator caótico por uma cascata de duplicações de período de uma órbita de período 6, que nasce em $B \approx 3,1$, provavelmente em uma bifurcação tipo nó-sela. Observa-se que, para $B \leq 7,36$, esta solução coexiste com uma resposta periódica harmônica.

primeiro modo flexional da ponte oscilante. Diante de uma combinação de dois modos, com diferentes comprimentos de onda, o sistema talvez só possa ser descrito em termos espaço-temporais, abrindo assim um novo campo de trabalho. E ainda, a combinação com um modo *torcional*, no qual os pares de tirantes trabalham em oposição de fase, pode ser modelada por um sistema que exiba padrões de transferência de energia entre os diferentes modos.

E além de tudo isso, imagina-se que no decorrer da pesquisa possam ser revelados comportamentos ainda desconhecidos do sistema, apontando para uma multiplicidade de novos caminhos para sua investigação.

Capítulo 7

Conclusão

Um oscilador linear por partes, carregado, periodicamente forçado e amortecido foi investigado por simulação numérica. Sendo respeitado um bom número de aproximações, é possível aplicar esse sistema mecânico às ondulações de uma ponte pênsil estimulada pelo vento. Considerando a aparente simplicidade do modelo, foi revelada uma apreciável riqueza dinâmica. Ao tratar de modelos mais aprimorados, esses resultados servem como base para a compreensão de comportamentos progressivamente mais complexos.

Um forte sentido físico ficou evidenciado na interpretação dos gráficos obtidos, o qual se mostrou compatível com outros aspectos freqüentemente observados em sistemas com descontinuidades ou outros sistemas não-lineares forçados, o que sugere que o modelo matemático adotado é válido para a descrição dinâmica desse oscilador. Os padrões geométricos identificados no espaço de fase equivalem, qualitativamente, aos encontrados na bibliografia correlacionada. A metodologia adotada no capítulo (3), que consiste em calibrar gradualmente os parâmetros, mostrou-se proveitosa, tanto no confronto entre os resultados numéricos e as previsões feitas analiticamente, como na interpretação física dos diferentes tipos de saída gráfica. Foi conseguida uma compreensão mais ampla do comportamento de osciladores não-lineares forçados, principalmente no tocante ao papel desempenhado na estrutura das órbitas pelos diferentes parâmetros.

A simulação numérica, num vasto intervalo de parâmetros, revela a predominância da multiestabilidade na dinâmica do sistema estudado. Tal comportamento, abordado principalmente no capítulo (4), foi explorado, primeiramente, investigando os intervalos de existência das órbitas estáveis individuais. As extremidades desses intervalos correspondem a particularidades geométricas verificáveis no plano de fase, como por exemplo a coalescência entre órbitas estáveis e instáveis. Essa última constatação, em especial, justifica o decréscimo verificado no número de atratores coexistentes conforme é aumentado o parâmetro de dissipação. Mesmo não exibindo a mesma profusão de órbitas de outros casos encontrados na bibliografia consultada, sob o ponto de vista qualitativo os diagramas de bifurcações são comparáveis.

Uma revelação não-trivial desse sistema diz respeito à geometria das fronteiras de bacia. Quando a não-linearidade é moderada, o sistema conservativo e forçado apresenta estreitas camadas caóticas que separam os toros invariantes das cadeias de ilhas. Estas, com a introdução de um amortecimento fraco, são convertidas em centros de bacia, conectados

a canais espiralados que se dobram sucessivamente uns dentro dos outros. Em decorrência disso, numa janela genérica do plano de fase, é comum esses canais se apresentarem como bandas de bacia muito emaranhadas. Uma interpretação precipitada do aspecto dessas bandas sugere que a geometria seja fractal; outro indício nesse sentido é o fato de o expoente de incerteza levantado numericamente resultar não-inteiro, o que estaria associado a um valor também fracionário para a dimensão por contagem de caixas das fronteiras de bacia. Mas por outro lado, verificações cuidadosas de fundo topológico demonstram que as fronteiras não são realmente fractais: as bandas de bacia aparentam auto-similaridade devido a um processo de acumulação logarítmica. O esclarecimento desse paradoxo foi encaminhado por um procedimento algébrico apoiado em argumentos dinâmicos referentes ao espaço de fase, o qual justifica como a disposição das bandas de bacia faz com que seja imitada uma escala de potência, que caracteriza o expoente de incerteza fracionário. Então, em última instância, o resultado obtido pode ser considerado como legítimo, e conclui-se que este é um exemplo de autêntica obstrução à previsibilidade, mas num caso de fronteiras com geometria suave, e não fractal.

A busca por um estado caótico, no capítulo (5), foi significativamente abreviada graças às previsões heurísticas adiantadas no capítulo (3), mediante um aumento combinado da não-linearidade, da amplitude da excitação e do coeficiente de amortecimento. No caso, o atrator caótico encontrado coexiste com um foco estável, tendo as fronteiras de bacia também neste exemplo uma geometria suave. Mas o atrator em si tem estrutura fractal; para a comprovação da caoticidade das órbitas sobre esse conjunto invariante, foi contornado o problema da descontinuidade na derivada do campo vetorial em $y = 0$, que torna mais complicado o cálculo de expoentes de Lyapunov. Optou-se, alternativamente, por uma demonstração em termos geométricos, baseada na existência de cruzamentos homoclínicos entre as variedades estável e instável de um ponto de sela inserido no atrator, formando uma ferradura topológica.

Argumentos semelhantes, também de natureza topológica, foram usados para justificar a transição para o caos por crise de fronteira. No caso, também é explorada a configuração das variedades de um ponto de sela, mas agora sobre a fronteira de bacia. A análise geométrica se mostrou esclarecedora quanto à transição do estado caótico permanente para o transiente caótico que acaba, cedo ou tarde, por convergir para o foco estável. A estrutura subjacente a essa dinâmica no espaço de fase revelou uma extrema sensibilidade às condições iniciais, traduzida na ampla distribuição de tempos de duração do transiente. Esse resultado, modelável por uma lei exponencial, concorda com outros exemplos encontrados na bibliografia, assim como a variação da duração média do transiente com o parâmetro, nas proximidades do valor crítico, por uma lei de potência. A crise de fronteira tem uma implicação conceitual interessante: a observação de um sistema em regime caótico por tempo finito pode não ser suficiente para revelar seu estado assintótico, o qual pode ser periódico ou mesmo, em outros sistemas, divergir para infinito.

A respeito dos levantamentos estatísticos, a regressão referente aos tempos de transiente no capítulo (5), bem como ao expoente de incerteza no capítulo (4), mostrou fortes coeficientes de correlação, reforçando a validade dos procedimentos numéricos adotados.

O sistema escolhido oferece várias possibilidades de extensão em termos de linha de

pesquisa para continuidade deste trabalho. Três dentre elas foram abordadas no capítulo (6).

O estabelecimento de uma deformação de ruptura para a mola unilateral (representada, na ponte pênsil, pelos tirantes) mostra um processo de erosão da bacia de segurança. Para o exemplo escolhido, estados seguros se referem tanto ao atrator caótico quanto ao foco estável coexistente. No plano de fase, o escape acontece quando a trajetória contínua ultrapassa a deformação máxima. Mas a fronteira entre as bacias de segurança e de escape é formada por filamentos incursivos, os quais, com a redução do limite de ruptura, ou do coeficiente de amortecimento, ou ainda com o aumento da amplitude da excitação, fazem com que seja progressivamente diminuída a fração de condições iniciais seguras. Dentro de intervalos bem definidos da variação de cada um desses três parâmetros estudados, foram encontradas leis de potência. Nos casos em que o atrator caótico é destruído pela crise de fronteira, a bacia de segurança é bruscamente reduzida.

A adição de um termo de ruído aleatório representa pequenas irregularidades de natureza genérica no sistema (como por exemplo, na ponte pênsil, flutuações de pequena amplitude acrescidas à força periódica induzida pelo vento). O efeito revelado é, de certa forma, contrário àquele descrito no parágrafo anterior. Foi escolhido como exemplo o caso de multiestabilidade, que inclui atratores periódicos com bacias cujos centros têm diferentes larguras, que geralmente são menores para os focos de períodos mais altos. O aumento da amplitude do ruído, a partir de um limite verificável pela simulação numérica, faz diminuir a fração das condições iniciais que convergem para esses atratores de períodos mais altos, aumentando assim a área da bacia do atrator correspondente à ressonância primária. Há indício de uma lei de potência associada a esse processo; a investigação aqui iniciada não é ainda suficiente para apresentar resultados conclusivos. O fenômeno de salto entre bacias, verificado em outras publicações consultadas, não foi constatado neste sistema, mesmo nas regiões mais favoráveis do espaço de parâmetros.

O estudo do acoplamento de dois osciladores por uma mola unilateral (que no exemplo da ponte envolve a deformabilidade do cabo principal, conectado ao tabuleiro pelos tirantes) foi apenas iniciado, delineando algumas possibilidades para explorar esse novo sistema, de maior dimensionalidade. O modelo foi equacionado e alguns resultados prévios da simulação numérica foram apresentados, exibindo coexistência de soluções periódicas e quase-periódicas, sincronização e caos, que indicam linhas de pesquisa diversificadas, tendo em vista um trabalho futuro.

Finalmente, as digressões reunidas no apêndice (B) levantaram uma situação realística, tentando conectar os parâmetros da equação às características físicas de uma ponte pênsil típica. Foi constatado que as alterações nos parâmetros para adequar o sistema ao caso da ponte pênsil criam configurações no espaço de fase que têm sua visualização dificultada, mas que em termos qualitativos preservam aspectos investigados nos casos de apresentação didática mais simples. Quanto às dificuldades enfrentadas neste último estudo, estiveram bem adiante das expectativas. Mesmo adotando um tratamento com muitas aproximações (e talvez sendo algumas delas demasiado drásticas), relacionar parâmetros adimensionalizados de uma equação a grandezas diretamente mensuráveis exigiu uma extensa pesquisa em fontes bastante diversificadas, além de um forte senso intuitivo para

problemas mais próximos da engenharia do que da física teórica. Nesse sentido o resultado foi altamente produtivo, ao proporcionar o desenvolvimento de uma visão mais abrangente, que pode ser inclusive proveitosa num trabalho futuro, direcionado para experimentos de laboratório em modelos de osciladores lineares por partes, cujos resultados possam ser confrontados com os obtidos numericamente neste trabalho.

Apêndice A

Variáveis adimensionalizadas

Neste apêndice, é mostrado o procedimento para adimensionalização das variáveis e parâmetros envolvidos na equação diferencial parcial da ponte pênsil (2.3), repetida abaixo:

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \delta' \frac{\partial u}{\partial t} &= -k'u + W' \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) + B' \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{sen}(\omega' t), \\ \text{para } u > 0; \\ M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \delta' \frac{\partial u}{\partial t} &= W' \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) + B' \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{sen}(\omega' t), \\ \text{para } u < 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Basicamente, o processo de adimensionalização compreende uma transformação das variáveis independentes x e t , na forma ($\hat{x} = c_1 x$, $\hat{t} = c_2 t$), sendo c_1 e c_2 constantes com dimensões $[L]^{-1}$ e $[T]^{-1}$. Esse escalonamento conduz diretamente à definição dos *novos parâmetros* em termos de combinações dos antigos, por meio de expressões que resultam *adimensionais*.

O critério de normalização para a coordenada espacial ao longo do comprimento L da viga deve resultar em $\hat{x} = 1$ para o ponto correspondente a *um comprimento de onda* inteiro do primeiro modo flexional de ondulação ($\lambda_0 = 2L$). Quanto à variável temporal, deve respeitar $\hat{t} = 1$ para o instante correspondente a *um período* inteiro desse mesmo modo de ondulação, com o cuidado de tomar a elasticidade da viga *sem* os tirantes ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$; $\omega_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{M}}$) [Thomson 78] (p.206).

Para reescrever A.1 de acordo com esses critérios, é conveniente antes fazer a separação de variáveis:

$$u(x, t) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) y(t); \quad (\text{A.2})$$

levando-se $u(x, t)$ com suas derivadas espaciais e temporais em A.1, chega-se à forma

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 y}{dt^2} + EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 y + \delta' \frac{dy}{dt} &= -k'y + W' + B' \operatorname{sen}(\omega' t), \\ \text{para } y > 0; \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} + EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 y + \delta' \frac{dy}{dt} &= W' + B' \operatorname{sen}(\omega' t), \\ \text{para } y < 0; \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

tendo sido todos os seus termos divididos por $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, já eliminando, com esse procedimento, a variável x . A introdução da nova variável $\hat{t} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{EIM} t$ resulta, após alguns passos algébricos, na equação

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\hat{t}^2} + y + \delta' \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} (EIM)^{-1/2} \frac{dy}{d\hat{t}} = & -\frac{k'}{EI} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} y + \\ & + \frac{W'}{EI} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} + \frac{B'}{EI} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} \text{sen} \left(\omega' \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} \sqrt{\frac{M}{EI}} \hat{t} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

válida para $y > 0$ (a equação para $y < 0$ só se distingue desta por *não apresentar* o termo que envolve k'). Nas parcelas de A.4, são identificadas diretamente as expressões para os novos parâmetros:

$$\omega = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} \sqrt{\frac{M}{EI}} \omega'; \quad (\text{A.5})$$

$$B = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} (EI)^{-1} B'; \quad (\text{A.6})$$

$$k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} (EI)^{-1} k'; \quad (\text{A.7})$$

$$W = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} (EI)^{-1} W'; \quad (\text{A.8})$$

$$\delta = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} (EIM)^{-1/2} \delta'. \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, substituindo essas transformações em A.4 obtém-se

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + (k+1)y = W + B\text{sen}(\omega t) \quad & \text{para } y > 0 \\ \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + y = W + B\text{sen}(\omega t) \quad & \text{para } y < 0, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

tendo agora sido reescrita a variável \hat{t} como simplesmente t , com os pontos simbolizando as derivadas temporais. Essa é a equação 2.8.

Apêndice B

Parâmetros da equação diferencial em termos dos dados de uma ponte real

Para explorar, em toda a sua riqueza dinâmica, o oscilador linear por partes que modela a ponte pênsil, é importante que sejam investigados amplos intervalos de valores de parâmetros. Contudo, também é interessante que se tenha como referência quais seriam as ordens de grandeza de tais parâmetros, caso fossem tomados os dados estruturais de uma ponte pênsil típica. Para tanto, devem ser procuradas as expressões que relacionam os parâmetros da equação diferencial com dados mensuráveis em uma ponte real (incluindo aqueles envolvidos na adimensionalização) e fazer então uma estimativa em termos de ordem de grandeza. Os parâmetros de interesse são k (elasticidade dos tirantes), W (carregamento), ω (frequência da excitação), B (amplitude da excitação), e δ (amortecimento). Este apêndice mostra os procedimentos adotados: em primeiro lugar, é exposta uma discussão sobre cada parâmetro separadamente, sendo deduzida, quando necessário, uma expressão algébrica; em seguida, com base num levantamento de dados referentes a algumas pontes pênsis conhecidas, são calculados os valores numéricos (em unidades S.I. e adimensionalizados), sendo finalmente expressos em termos de ordem de grandeza. O objetivo dessa digressão é verificar se os resultados discutidos nos capítulos anteriores persistem, em termos qualitativos, no caso de aplicação do oscilador-modelo ao comportamento de uma ponte pênsil real.

B.1 Considerações sobre os parâmetros do sistema

B.1.1 Elasticidade dos tirantes

Nesta subseção, é esclarecido o significado do parâmetro k' em A.1, associando-o aos dados de uma ponte pênsil real. Revisando: o tabuleiro é considerado como uma viga flexível, apoiada nas duas extremidades e sustentada por um número $2N$ de tirantes, tratados como molas unilaterais. A seleção do primeiro modo flexional favorece a separação de variáveis, reduzindo o problema a um oscilador unidimensional, linear por partes. Nesse

contexto, procura-se um valor adequado para a elasticidade devida aos tirantes k' . As parcelas em A.1 representam forças transversais por unidade de comprimento longitudinal. Nesse sentido, uma estimativa aceitável para k' é o quociente entre a *constante equivalente* K do conjunto de $2N$ tirantes e o *vão central* da ponte L . Quanto ao tabuleiro, pode ser considerado como rígido (exclusivamente para o cálculo dessa constante equivalente), e assim o conjunto de tirantes fica simplificado, funcionando como uma associação de molas em paralelo. Mas, mesmo ignorando a curvatura do tabuleiro, os comprimentos dessas molas são diferentes, devido à geometria do cabo principal: para cada coordenada longitudinal x_j , tem-se um diferente valor para o comprimento dos tirantes c_j , e portanto um diferente valor para a constante elástica individual $K_j = \frac{ES}{c_j}$, sendo S a área da seção reta do par de tirantes (a mesma para todos os x_j) e E o módulo de elasticidade de Young do material [Thomson 78] (p.35). Dessa forma, a constante equivalente K fica expressa pela somatória:

$$K = \sum_{j=1}^N K_j = \sum_{j=1}^N \frac{ES}{c_j}. \quad (\text{B.1})$$

Os comprimentos c_j podem ser expressos em função de x_j desde que se especifique a geometria do cabo principal. Por exemplo, aproximando-o por um arco de parábola com flecha $y = -C$, conforme a figura B.1, tem-se

$$c_j(x_j) = -C \left(\frac{2x}{L} - 1 \right)^2, \quad (\text{B.2})$$

ficando-se com

$$K = \sum_{j=1}^N K_j = \sum_{j=1}^N \left(\frac{ES}{-C \left(\frac{2x}{L} - 1 \right)^2} \right). \quad (\text{B.3})$$

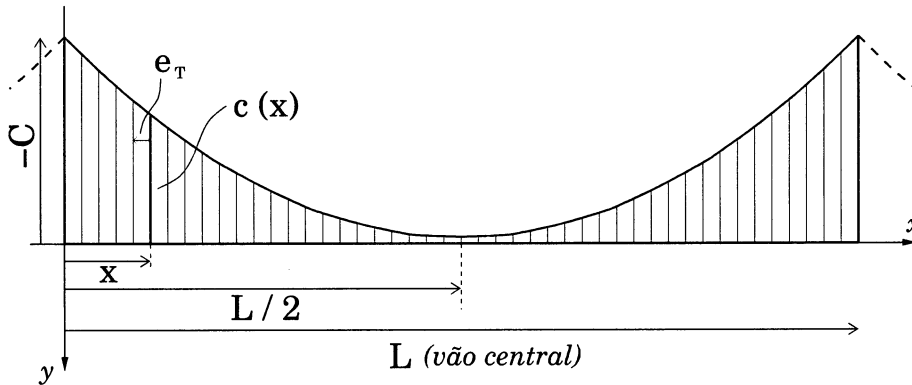


Figura B.1: Representação esquemática da ponte pênsil, tendo em vista o cálculo da constante elástica equivalente do conjunto de tirantes. O comprimento $c(x)$ para cada par de tirantes depende da geometria do cabo principal, que aqui é suposta como parabólica com flecha C .

Se a área da seção dos tirantes for considerada como distribuída no comprimento do vão, pode-se aproximar a somatória acima por uma integral, conforme a figura B.2.

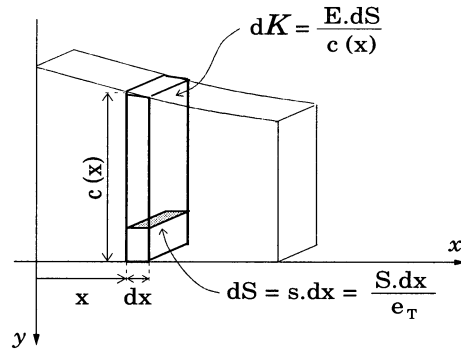


Figura B.2: Aproximação do conjunto de tirantes por uma distribuição contínua ao longo do vão central da ponte, com perfil parabólico. No cálculo da constante elástica equivalente, pode-se então substituir a somatória por uma integral.

A área distribuída s vale

$$s = \frac{\sum S}{L} = \frac{S \frac{L}{e_T}}{L} = \frac{S}{e_T}, \quad (\text{B.4})$$

sendo $e_T = L/N$ o espaçamento entre tirantes ao longo do comprimento do vão; a constante equivalente K pode ser escrita, então, como

$$K = \sum_{j=1}^{L/e} K_j \approx \int_{x=0}^L dK = \int_{x=0}^L \frac{EdS}{c(x)}; \quad (\text{B.5})$$

substituindo $c(x)$:

$$K = \int_{x=0}^L \frac{EdS}{-C \left(\frac{2x}{L} - 1 \right)^2} = -\frac{ES}{e_TC} \int_{x=0}^L \frac{dx}{\left(\frac{2x}{L} - 1 \right)^2}; \quad (\text{B.6})$$

calculando a integral, vem

$$K = -\frac{ES}{e_TC}(-L) = \frac{ESL}{e_TC}, \quad (\text{B.7})$$

e, finalmente,

$$k' = \frac{K}{L} = \frac{ES}{e_TC}. \quad (\text{B.8})$$

A constante elástica adimensionalizada k , de acordo com A.7, se relaciona a k' por

$$k = \left(\frac{\pi}{L} \right)^{-4} (EI)^{-1} k', \quad (\text{B.9})$$

portanto,

$$k = \left(\frac{\pi}{L} \right)^{-4} \frac{S}{Ie_TC}, \quad (\text{B.10})$$

sendo L o comprimento do vão central do tabuleiro, I o momento de inércia da sua seção transversal, S a área da seção transversal de um par de tirantes, e_T o espaçamento longitudinal entre tirantes, e C a flecha do cabo principal (como consequência desse procedimento, o módulo de Young E do material do tabuleiro foi eliminado). Tabelas com especificações construtivas de algumas pontes conhecidas fornecem valores de L , I , e_T e C [O'Connor 76] (pp.336, 338); dispõe-se também de um valor típico para S [O'Connor 76] (p.377).

B.1.2 Carregamento

O parâmetro de carregamento constante W' corresponde ao peso da estrutura por unidade de comprimento do tabuleiro, e seu valor consta explicitamente nas tabelas de pontes conhecidas [O'Connor 76]; o carregamento adimensionalizado W está relacionado a W' por A.8

$$W = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} (EI)^{-1} W', \quad (\text{B.11})$$

tendo E , I e L sido listados no último parágrafo da subseção anterior.

B.1.3 Freqüência e amplitude da excitação externa

Nesta subseção, procura-se expressões para ω' e B' (freqüência e amplitude da excitação) em termos de dados mensuráveis em uma ponte real, estimulada pelo fluxo transversal do vento. Assume-se que a excitação periódica se origina na força motriz que advém do desprendimento alternado de vórtices junto à face posterior do tabuleiro (“força de arraste”), conforme o modelo da *esteira de vórtices* de von Kármán [Daugherty e Ingersoll 54],[Shames 82]. A situação é esquematizada na figura B.3.

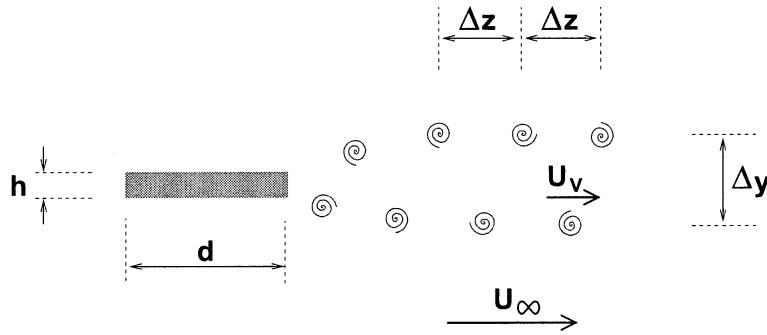


Figura B.3: Representação esquemática da esteira de vórtices de von Kármán, formada pela interposição de um prisma retangular de altura h no fluxo transversal de um fluido com velocidade U_∞ . Os vórtices são desprendidos alternadamente na face superior e na inferior, deslocando-se em relação ao prisma com velocidade U_V .

A freqüência angular ω' da excitação pode ser escrita diretamente em termos do espaçamento horizontal Δz entre dois vórtices sucessivos inferiores (ou dois superiores) e da velocidade U_V de deslocamento desses vórtices em relação ao tabuleiro:

$$\omega' = 2\pi \frac{U_V}{\Delta z}; \quad (\text{B.12})$$

é interessante aqui que a relação acima seja expressa em termos da velocidade do vento U_∞ e da altura do tabuleiro h , na forma [Daugherty e Ingersoll 54] (p.307):

$$\omega' = 2\pi(0,198) \left(1 - \frac{19,7}{N_R}\right) \frac{U_\infty}{h}, \quad (\text{B.13})$$

sendo N_R o *número de Reynolds* (quantidade adimensional, definida por uma combinação de constantes associadas ao corpo e ao fluxo: $N_R = \frac{DU}{\nu}$, sendo U a velocidade do fluxo, ν a viscosidade cinemática e D uma dimensão característica do corpo). A formação da trilha de vórtices é tipicamente visualizável para o intervalo $30 < N_R < 120$ [Daugherty e Ingersoll 54] (p307); aplicando esses dois extremos em B.13 e calculando a média, tem-se a estimativa

$$\omega' \approx (0, 23)\pi \frac{U_\infty}{h}. \quad (\text{B.14})$$

A *frequência angular adimensionalizada* ω depende de ω' conforme A.5:

$$\omega = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} \sqrt{\frac{M}{EI}} \omega', \quad (\text{B.15})$$

portanto,

$$\omega = (0, 23)\pi \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} \sqrt{\frac{M}{EI}} \frac{U_\infty}{h}, \quad (\text{B.16})$$

sendo h a altura e L o comprimento do vão central do tabuleiro, e I o momento de inércia da sua seção transversal, todos tomados das tabelas de pontes conhecidas [O'Connor 76] (pp.336, 338). E é o módulo de Young do material. A massa por unidade de comprimento M é calculada diretamente do peso W' e da aceleração da gravidade g ; quanto à velocidade do vento U_∞ , é conveniente adotar um valor moderado ($U_\infty = 20\text{m/s}$) para ser compatível com os números de Reynolds relativamente baixos, para a validade da expressão B.13.

Com respeito à *amplitude da excitação* B' , deve corresponder à intensidade máxima da força periódica de arraste por unidade de comprimento do tabuleiro. O *valor médio* dessa força, em termos do espaçamento vertical Δy entre os vórtices superiores e os inferiores, e das velocidades do vento U_∞ e de deslocamento dos vórtices U_V , é dado pela expressão [Shames 82] (p.412):

$$B'_{med} = \rho U_\infty^2 \Delta y \left((2, 83) \left(\frac{U_V}{U_\infty}\right) - (1, 12) \left(\frac{U_V}{U_\infty}\right)^2 \right), \quad (\text{B.17})$$

sendo ρ a massa específica do ar. Como o resultado final será tomado em ordem de grandeza, pode-se negligenciar a correção do *valor médio* para um *valor máximo*. A velocidade dos vórtices U_V não é conhecida, mas o quociente $\frac{U_V}{U_\infty}$ pode ser obtido comparando B.12 com B.13:

$$\frac{U_V}{U_\infty} = (0, 198) \left(1 - \frac{19,7}{N_R}\right) \frac{\Delta z}{h}, \quad (\text{B.18})$$

que, com o mesmo número de Reynolds adotado para obtenção de B.13, fica $\frac{U_V}{U_\infty} = (0, 14) \frac{\Delta z}{h}$; assim, B.17 resulta em

$$B' = \rho U_\infty^2 \Delta y \left((0, 396) \frac{\Delta z}{h} - (0, 022) \left(\frac{\Delta z}{h}\right)^2 \right). \quad (\text{B.19})$$

A *amplitude adimensionalizada* B é obtida de B' por A.6:

$$B = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} (EI)^{-1} B', \quad (\text{B.20})$$

e portanto,

$$B = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-4} (EI)^{-1} \rho U_{\infty}^2 \Delta y \left((0, 396) \frac{\Delta z}{h} - (0, 022) \left(\frac{\Delta z}{h}\right)^2 \right), \quad (\text{B.21})$$

sendo E , I , L , M e U_{∞} os mesmos listados em B.16; a altura do tabuleiro h consta nas tabelas [O'Connor 76](p.338); a adoção de um valor para os espaçamentos vertical e horizontal entre vórtices (Δy e Δz) foi fundamentada em um resultado experimental, respeitando as proporções em termos da altura do tabuleiro h [Morgenthal 00].

B.1.4 Amortecimento

Finalmente, são expostos nesta subseção alguns aspectos referentes ao parâmetro de dissipação δ' em A.1, que possibilitam que este seja associado a dados de uma ponte real. Trata-se de um coeficiente de *amortecimento viscoso*, tomado por unidade de comprimento longitudinal, para que o termo de arraste em A.1 tenha as mesmas dimensões das demais parcelas:

$$\delta' = \frac{\frac{F_{arr}(t)}{L}}{u_t} = \frac{b}{L}. \quad (\text{B.22})$$

No movimento flexional do tabuleiro da ponte com os tirantes, em oscilação livre com período T_N , o coeficiente de amortecimento b faz com que duas amplitudes sucessivas u_n e u_{n+1} se relacionem por [Halliday e Resnick 91] (p.34)

$$u_{n+1} = u_n e^{-\frac{b T_N}{2m}}, \quad (\text{B.23})$$

sendo m a massa do sistema; dividindo-se pelo comprimento L do vão central o numerador e o denominador do expoente, e substituindo em seguida por $\frac{m}{L} = M$ e $\frac{b}{L} = \delta'$, fica-se com

$$u_{n+1} = u_n e^{-\frac{\delta' T_N}{2M}} = u_n e^{\alpha}, \quad (\text{B.24})$$

sendo $\alpha = -\frac{\delta' T_N}{2M}$ identificável com a *constante de decremento logarítmico* [O'Connor 76] (p.387); assim pode-se escrever

$$\delta' = \frac{2M}{T_N} \alpha. \quad (\text{B.25})$$

O coeficiente de amortecimento adimensionalizado δ depende de δ' conforme A.9:

$$\delta = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} \frac{1}{\sqrt{EIM}} \delta'; \quad (\text{B.26})$$

portanto,

$$\delta = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} \frac{1}{\sqrt{EI}} \frac{2\sqrt{M}}{T_N} \alpha, \quad (\text{B.27})$$

com os mesmos E , I , L e M listados em B.16; o período natural T_N de oscilação flexional do tabuleiro é calculável das tabelas para algumas pontes [O'Connor 76](p.397); resultados de experimentos em pontes com diferentes comprimento de vão central fornecem valores-limite para a constante de decremento logarítmico $\alpha = -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ [O'Connor 76] (p.397). Deve-se lembrar aqui que tais medições mostram, certamente, o *efeito superposto* das diversas

modalidades de perda de energia (atrito com o ar, inelasticidade da estrutura, ou ainda outras). Na equação diferencial escolhida como modelo neste trabalho, a força de atrito é diretamente proporcional à velocidade vertical do tabuleiro, englobando portanto todos os efeitos dissipativos como se fossem devidos a um único termo de *amortecimento viscoso*.

B.2 Levantamento de dados e cálculo das ordens de grandeza

Dados estruturais disponíveis para seis pontes pênses conhecidas constam na Tabela B.1. Para a estimativa dos parâmetros referentes a uma ponte real, é tomado o valor *médio* referente a cada coluna (apenas o momento de inércia da ponte de Tacoma original foi excluído desse levantamento, por ser excessivamente atípico, cerca de 45 vezes menor que a média dos outros).

Tabela B.1: Dados estruturais de algumas pontes conhecidas [O'Connor 76](p.306,p308)

Nome da ponte	Carregamento $W' [kN/m]$	Momento de inércia $I [m^4]$	Comprimento do vão $L [m]$	Altura da viga $h [m]$	Esp. dos tirantes $e_T [m]$	Flecha do cabo $C [m]$
Golden Gate	333	5,28	1280	7,60	15	145
George Washington	584	3,96	1067	9,15	18	96
Forth	153	4,73	1006	8,40	18	91
S. Francisco-Oakland	272	8,34	704	9,15	9	70
Verrazano	535	10,80	1298	7,30	15	117
Tacoma original	83	(0,15)	853	2,45	15	71
Valores médios	327	6,6	1035	7,34	15	98

A massa por unidade de comprimento vale $M = \frac{W'}{g}$, sendo $g = 9,8m/s^2$ a aceleração da gravidade. Alguns dados não foram encontrados para todas essas pontes. Por exemplo, a área da seção reta de um par de tirantes consta com o valor $S = 21,3cm^2$ em um exemplo de estrutura real [O'Connor 76] (p.337). Toma-se ainda o módulo de Young do aço e a massa específica do ar respectivamente iguais a $E = 2.10^{11}N/m^2$ e $\rho = 1.21kg/m^3$ [Halliday e Resnick 91] (p.10, p.78). Quanto aos espaçamentos vertical e horizontal entre vórtices (Δy e Δz), pode-se consultar a imagem obtida experimentalmente para um modelo de tabuleiro de ponte em túnel de vento (Figura B.4) [Morgenthal 00] (p.66).

Tendo como base a figura B.4, observa-se na imagem que $\Delta y \approx 3h$ e $\Delta z \approx 2h$, sendo h a altura do tabuleiro. Uma escolha aceitável, visto que o interesse está apenas na ordem de grandeza, consiste em supor que a mesma proporção é aproximadamente respeitada para uma ponte real. Aplica-se então estas expressões ao valor médio de h da tabela B.1, obtendo-se $\Delta y \approx 22m$ e $\Delta z \approx 15m$.

Para a velocidade de fluxo do vento, toma-se um valor moderado ($U_\infty \approx 20m/s$). A frequência natural de oscilação de uma ponte pênsil típica é $6,8min^{-1}$ em média, para

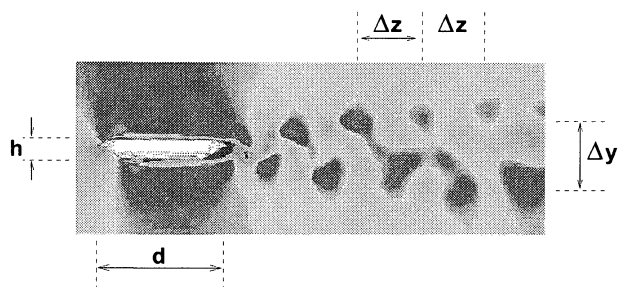


Figura B.4: Contornos de velocidade de uma esteira de vórtices obtida experimentalmente em túnel de vento com velocidade U_∞ , para um modelo de tabuleiro de ponte com altura h [Morgenthal 00] (p.66). Nessa imagem, o espaçamento vertical entre as duas linhas de vórtices vale $\Delta y \approx 3h$, e o espaçamento horizontal entre dois vórtices sucessivos na mesma linha vale $\Delta z \approx 2h$.

o primeiro modo flexional assimétrico [O'Connor 76] (p.397), portanto a ordem de grandeza para o modo aqui estudado será tomada como metade desse valor ($\omega_N = 2\pi f_N \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$). Quanto à constante de decremento logarítmico, ensaios experimentais fornecem valores da ordem de $\alpha \approx 0,06$ (adimensional) [O'Connor 76] (p.397). Reunindo todos esses valores numéricos e lançando-os nas expressões para os parâmetros, expostas na seção anterior, são obtidos os valores apresentados na tabela B.2.

Tabela B.2: Valores dos parâmetros calculados para uma ponte real

parâmetro	elast. k	carreg. W	freq. excit. ω	ampl. excit. B	amort. δ
unidades S.I.	272, $1 \cdot 10^3$	327, $0 \cdot 10^3$	1,98	8, $0 \cdot 10^3$	226,9
adimensionalizado	2433,4	2924,3	34,2	71,6	0,117
ordem de grandeza	10^3	10^3	10^1	10^2	10^{-1}

Os valores de parâmetros adotados no capítulo (3) e nos subseqüentes, para o oscilador linear por partes, devem portanto ser multiplicados por fatores de 10^1 até 10^3 , se esse modelo for aplicado a uma ponte pênsil típica. Tendo como referência os casos já explorados, quais as características que se pode esperar que sejam mantidas para alterações tão drásticas na ordem de grandeza? Uma pista pode ser encontrada com base na metodologia adotada na seção (3.2), valendo-se de considerações gerais quanto ao papel desempenhado pelos diferentes parâmetros do sistema. Nos parágrafos seguintes, a mesma seqüência de introdução dos parâmetros é aplicada aos valores relativos à ponte pênsil. É interessante o paralelo com o quadro-resumo da figura 3.14.

A alta rigidez dos tirantes ($k_{real} \approx 10^2 k$) deve provocar um exagero dos aspectos não-lineares do sistema. Isso se traduz numa assimetria bem mais pronunciada na curva do potencial efetivo, assim como nas trajetórias de fase. Se esse aumento fosse aplicado isoladamente, a posição de equilíbrio estático praticamente coincidiria com a origem do plano de fase; com isso, o pequeno poço de potencial ficaria reduzido a proporções insignificantes, restringindo a existência das órbitas carregadas.

Mas, pela tabela B.2, a alta rigidez vem acompanhada por um forte *carregamento* ($W_{real} \approx 10^3 W$). Esse efeito combinado de k e W faz com que seja novamente *afastada* da origem a posição de equilíbrio estático (conforme a expressão 3.8). Portanto, *existe* um poço de potencial significativo, sendo assim ampliada a região do plano de fase acessível a órbitas carregadas, que se comportam como ressonâncias lineares. Resumindo os efeitos em termos qualitativos: um aumento em W compensa, em parte, o aumento em k . De fato, pelo menos para o caso de oscilações livres e não-amortecidas ($B = 0, \delta = 0$), o movimento do tabuleiro da ponte é similar ao do oscilador-modelo, como mostra a figura B.5, obtida por simulação numérica.

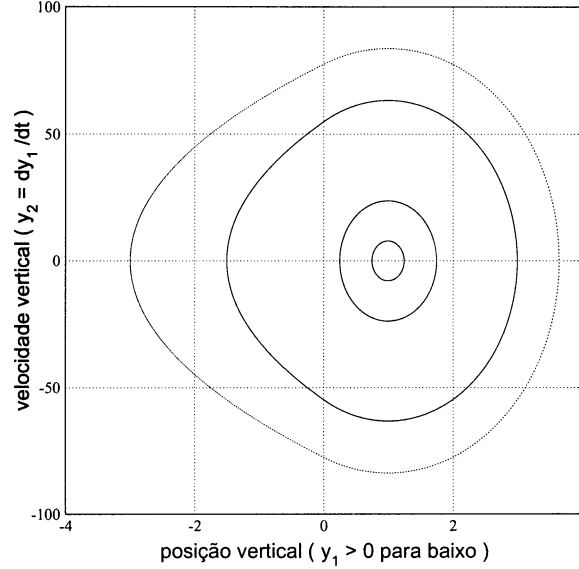


Figura B.5: *Trajetórias contínuas no plano de fase ($y_1 = y, y_2 = \dot{y}$) correspondentes à oscilação livre e sem amortecimento para a ponte pênsil, com $k = 1000$ e $W = 1000$, para diferentes condições iniciais. As órbitas carregadas se situam inteiramente no semi-plano $y > 0$. Esse resultado difere do obtido na figura 3.5 apenas por um fator de escala, referente à alta energia necessária para provocar a oscilação (os segmentos de curva para $y < 0$ são perfeitos arcos de círculo; aparecem aqui distorcidos justamente devido a esse fator de escala).*

A frequência ($\omega_{real} \approx 10^1 \omega$) e a amplitude ($B_{real} \approx 10^2 B$) da excitação externa, que é causada pelo fluxo do vento contornando o tabuleiro da ponte, introduzem uma *perturbação* no resultado obtido no parágrafo anterior (mantendo por enquanto $\delta = 0$, para analisar o sistema hamiltoniano). O resultado esperado é a destruição de toros, com formação de cadeias de ilhas, e eventualmente com caos global. Simulações numéricas foram testadas aqui para algumas combinações de valores nessa ordem de grandeza. Um dos exemplos de resultado não-trivial é mostrado na figura B.6. De fato, há evidência de pontos elípticos correspondentes a duas ressonâncias harmônicas ($m = 1$) e duas sub-harmônicas ($m = 2$ e $m = 3$), circundados por trajetórias quase-periódicas que constituem as cadeias de ilhas. A visualização não é tão imediata como nos exemplos do capítulo (3), devido à distorção causada pela alta assimetria das órbitas (pois o valor de k para a ponte é elevado); mesmo assim, pode ser percebida a analogia com a figura 3.8.

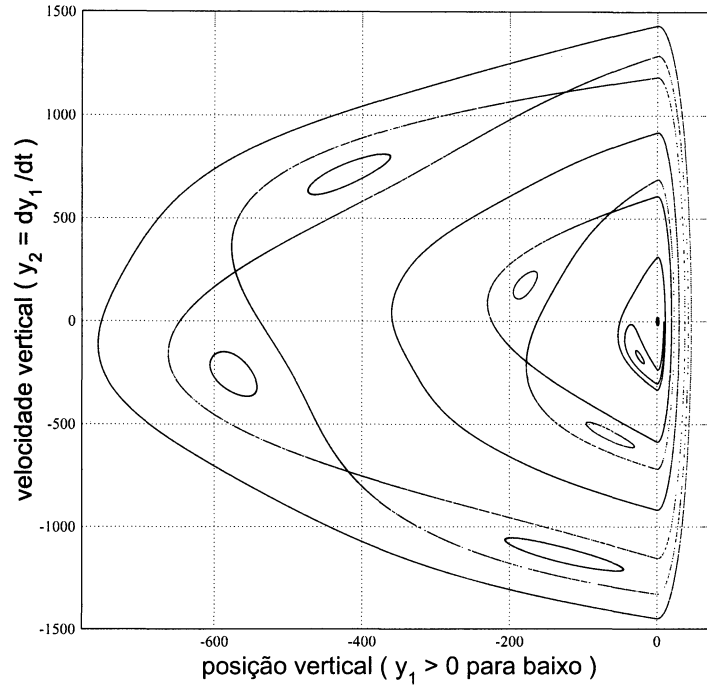


Figura B.6: *Seção de Poincaré no plano de fase ($y_1 = y, y_2 = \dot{y}$) correspondente à oscilação forçada e sem amortecimento para a ponte pênsil, com $k = 1000$, $W = 1000$, $\omega = 10$ e $B = 100$, para diferentes condições iniciais. A acentuada assimetria das órbitas (alto k) faz com que a estrutura de ilhas se mostre mais distorcida que a da figura 3.8.*

Finalmente, a introdução do amortecimento merece uma análise mais detida, devido à especial sensibilidade que o sistema apresenta em relação a este parâmetro, como foi verificado nos resultados das figuras 4.2 e 5.10. O valor estimado para a ponte equivale apenas ao dobro do valor típico usado no capítulo (5), ou dez vezes no caso do capítulo (4) ($\delta_{real} \approx 10^1 \delta$). Contudo, conforme foi discutido em ambas as situações, o efeito desse aumento moderado pode estar contextualizado num caso de crise de fronteira, ou de redução brusca no número de atratores coexistentes.

O que se espera é que a introdução de um amortecimento *suave* ao exemplo mostrado acima resulte nas bacias de quatro atratores periódicos. Isso é confirmado pela simulação numérica e exemplificado na figura B.7, obtida ainda com um pequeno valor do amortecimento ($\delta = 0,01$) acrescentado aos parâmetros da figura B.6: a geometria das fronteiras de bacia respeita um padrão semelhante aos casos apresentados na figura 3.13, ficando evidenciada a correspondência entre os focos estáveis de diferentes períodos e os pontos elípticos da figura B.6.

Da mesma forma, se o caso hamiltoniano envolvesse caos global, semelhante ao da figura 3.10, o amortecimento moderado criaria um atrator caótico, provavelmente coexistindo com um ou mais estados alternativos periódicos.

Por outro lado, um amortecimento demasiado forte implicaria em restringir a diversidade dinâmica, chegando até o caso extremo de uma resposta periódica única para qualquer condição inicial no plano de fase.

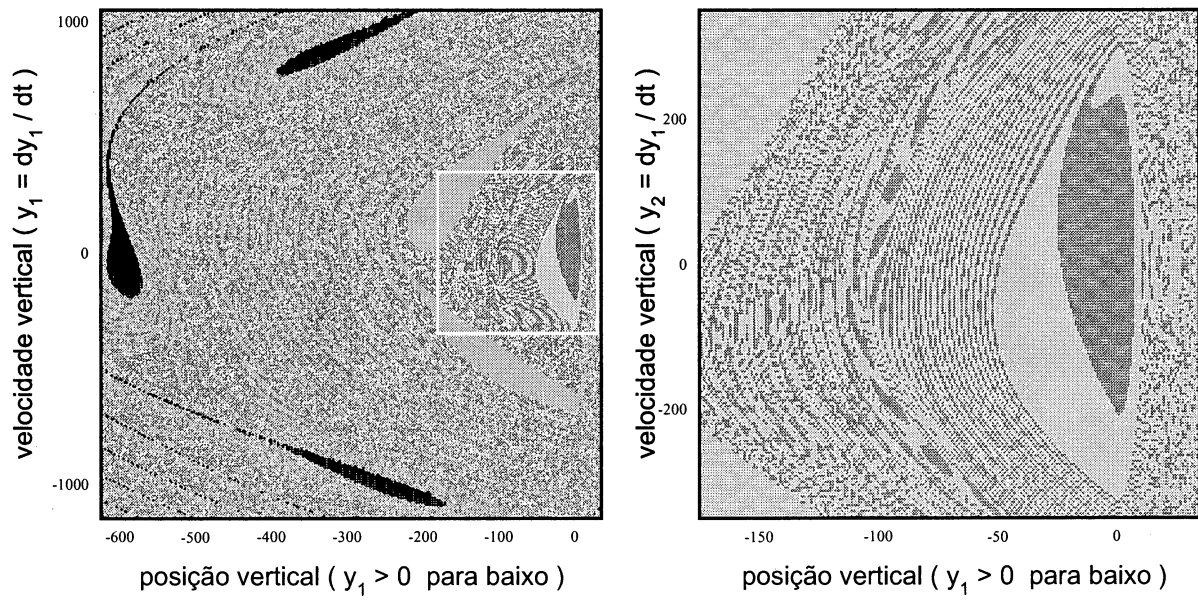


Figura B.7: *Bacias de atração para os parâmetros da ponte pênsil ($k = 1000$, $W = 1000$, $\omega = 10$, $B = 100$), para um amortecimento mais suave que o estimado ($\delta = 0,01$). As bandas estreitas de bacia, nítidas na ampliação à direita, mostram problemas de resolução na malha adotada à esquerda. Mas ficam evidenciados os focos estáveis, que correspondem aos pontos elípticos da figura B.6. Note-se a semelhança da geometria com a dos casos ilustrados na figura 3.13.*

No caso, tomando como referência a figura B.7 e refazendo a simulação numérica, agora com o valor estimado do amortecimento para a ponte pênsil ($\delta = 0,10$), chega-se ao resultado exposto na figura B.8. Conforme o esperado, o aumento de δ implica na diminuição do número de atratores periódicos coexistentes.

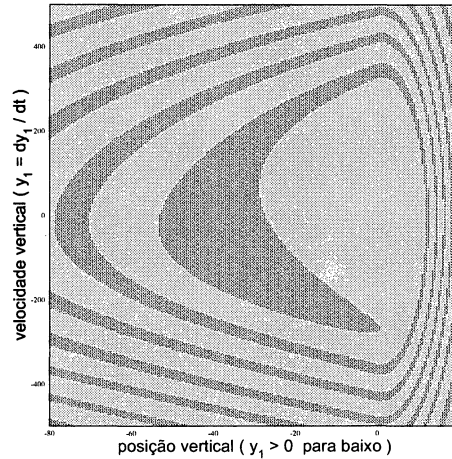


Figura B.8: *Bacias de atração com os parâmetros estimados para a ponte pênsil, conforme a tabela B.2. Persiste a semelhança com os casos ilustrados na figura 3.13.*

As bacias de atração da figura B.8 conduzem a estados assintóticos periódicos com amplitudes bem diferenciadas, destacados na figura B.9.

Os resultados obtidos nas figuras B.8 e B.9 levam a supor que a ponte, estando oscilando no estado mais seguro, poderia ser deslocada, por um golpe brusco adicional do vento, para a bacia do atrator de grande amplitude. Considerando a possibilidade de ruptura dos tirantes, a coexistência de estados com amplitude tão díspares coloca a estrutura em risco de colapso.

É interessante levar em consideração o comportamento sensível do sistema às variações no amortecimento. Para isso, é apresentado na figura B.10 um diagrama de bifurcações, traçado com a técnica de continuidade de órbitas descrita na seção (4.1). O aspecto é análogo ao da figura 4.2, e valem aqui as mesmas discussões pormenorizadas da seção (4.1), com respeito aos intervalos de existência das soluções. Pares de órbitas periódicas no plano de fase, uma estável e a outra instável, coalescem para valores bem definidos do amortecimento, caracterizando as bifurcações nó-sela, que no diagrama estão localizadas no limite superior dos intervalos.

Assumindo como válidas as estimativas levantadas neste apêndice, pode-se formular algumas conjecturas. O oscilador linear por partes exibe um comportamento bastante rico e diversificado, para um amplo intervalo de parâmetros. Contudo, essa riqueza dinâmica se manifesta menos nitidamente quando os parâmetros são aplicados ao exemplo das oscilações da ponte pênsil estimulada pelo fluxo lateral do vento. Essencialmente, é a presença da linearidade por partes, representada pelo parâmetro k , que proporciona os vários comportamentos estudados neste trabalho, tais como obstrução à previsibilidade devida à estrutura intrincada das fronteiras de bacia com acumulação logarítmica, ou os longos transientes caóticos próximos à crise de fronteira, ou ainda os efeitos da erosão de bacia de segurança

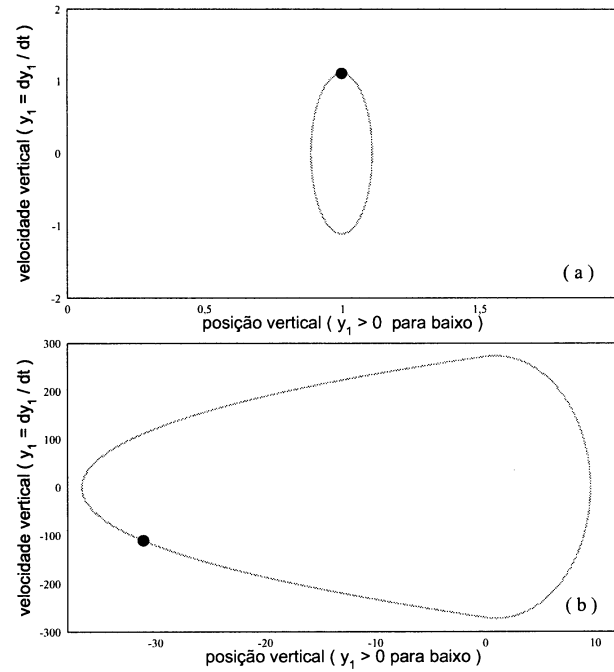


Figura B.9: *Estados assintóticos periódicos coexistentes para a ponte pênsil, correspondentes às bacias de atração da figura B.8. São mostradas as trajetórias contínuas no plano de fase (y, \dot{y}) , com os respectivos pontos estroboscópicos. A diferença de amplitude entre as respostas (a) e (b) é altamente pronunciada.*

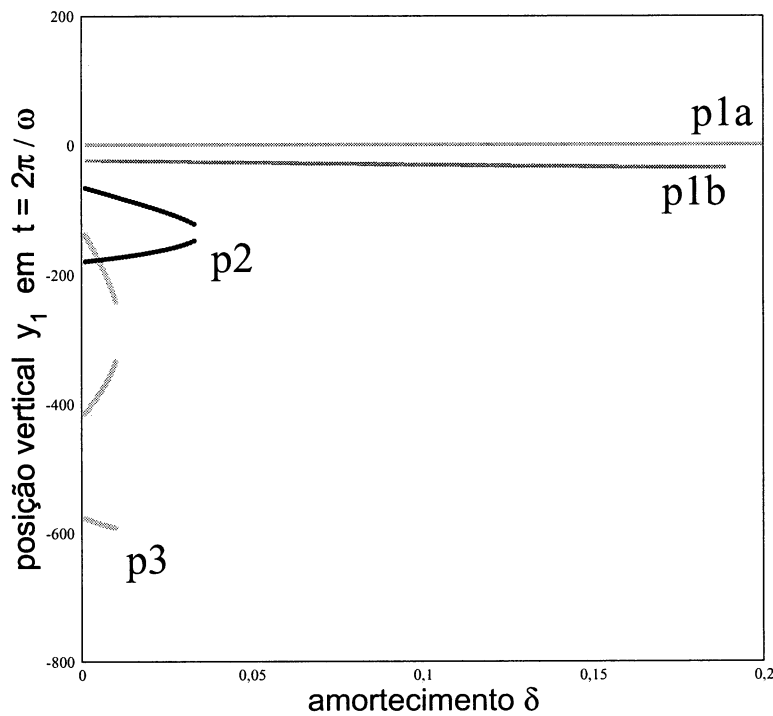


Figura B.10: *Diminuição do número de órbitas periódicas coexistentes, conforme é aumentada a dissipação de energia. Os demais parâmetros são os mesmos da figura B.6. Note-se a semelhança com a figura 4.2.*

nos casos de escape e de destruição de atratores por adição de ruído, etc. Contudo, esses efeitos ficam melhor visualizáveis no espaço de fase para valores *moderados* de k , pois, para valores muito baixos, recai-se no caso trivial da ressonância linear, e para valores elevados, como o do exemplo da ponte pênsil, a assimetria exagerada das trajetórias faz com que as estruturas no trecho $y > 0$ apareçam demasiadamente comprimidas, dificultando a sua interpretação. De qualquer forma, as conclusões da investigação conduzida neste apêndice são um bom indício de que os resultados obtidos nos capítulos (3) a (6) tenham caráter robusto, provavelmente podendo ser estendidos a diversos sistemas mecânicos cuja resposta elástica linear por partes seja semelhante à do modelo adotado neste trabalho.

Bibliografia

- [Alligood *et al.* 96] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke (1996), *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems* (Springer, N.Y.).
- [Arecchi *et al.* 85] F.T. Arecchi, R. Badii, A. Politi (1985), *Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system*, Phys.Rev. A **32** (1), 402-408.
- [Banerjee *et al.* 00] S. Banerjee, P. Ranjan, C. Grebogi (1999), *Bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps - theory and applications in switching circuits*, IEEE Trans. Circuits Syst., I: Fundam. Theory Appl. **47** (5) 633-643.
- [Banerjee e Grebogi 99] S. Banerjee, C. Grebogi (1999), *Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps*, Phys. Rev. E **59** (4), 4052-4061.
- [Bardin e Furta 98] B.S. Bardin, S.D. Furta (1998), *Soliton-like oscillations of an infinite beam on a non-linearly elastic supports*, Chaos, Solitons & Fractals **9** (1/2), 145-156.
- [Billah e Scanlan 91] K.Y. Billah, R.H. Scanlan (1991), *Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate Physics textbooks*, Am.J.Phys. **59** (2), 118-124.
- [Cao *et al.* 01] Q. Cao, L. Xu, K. Djidjeli, W.G. Price, E.H. Twizell (2001), *Analysis of period-doubling and chaos of a non-symmetric oscillator with piecewise-linearity*, Chaos, Solitons & Fractals **12**, 1917-1927.
- [Champneys e McKenna 97] A.R. Champneys, P.J. McKenna (1997), *On solitary waves of a piece-wise linear suspended beam model*, Nonlinearity **10**, 1763-1782.
- [Chirikov 79] B. Chirikov (1979), *A universal instability of many-dimensional oscillator system*, Phys.Rep. **52**, 263-379.
- [O'Connor 76] C. O'Connor (1976), *Pontes - Superestruturas* (Livros Técnicos e Científicos, R.J.).
- [Daugherty e Ingersoll 54] R.L. Daugherty, A.C. Ingersoll (1954), *Fluid Mechanics - with engineering applications*, 5^a ed. (McGraw-Hill, N.Y.).
- [di Bernardo *et al.* 00] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys (2000), *Normal form maps for grazing bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems*, Phys. D **160** (3-4), 222-254.

- [Doole e Hogan 96] S.H. Doole, S.J. Hogan (1996), *A piecewise-linear suspension bridge model: nonlinear dynamics and orbit continuation*, Dynamics and Stability of Systems **11** (1), 1996.
- [Doole e Hogan 00] S.H. Doole, S.J. Hogan (2000), *Non-linear dynamics of the extended Lazer-McKenna bridge oscillation model*, Dynamics and Stability of Systems **15** (1), 43-58.
- [Epureanu e Greenside 98] B.I. Epureanu, H.S. Greenside (1998), *Fractal basins of attraction associated with a damped Newton's method*, SIAM Review **40** (1), 102-109.
- [Feudel et al. 96] U. Feudel, C. Grebogi, B.R. Hunt, J.A. Yorke (1996), *Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors*, Phys.Rev. E **54** (1), 71-81.
- [Feudel e Grebogi 97] U. Feudel, C. Grebogi (1997), *Multistability and the control of complexity*, Chaos **7** (4), 597-604.
- [Feudel et al. 98] U. Feudel, C. Grebogi, L. Poon, J.A. Yorke (1998), *Dynamical properties of a simple mechanical system with a large number of coexisting periodic attractors*, Chaos, Solitons & Fractals **9** (1/2), 171-180.
- [Freitas et al. 04] M.S.T. Freitas, R.L. Viana, C. Grebogi (2004), *Multistability, basin boundary structure, and chaotic behavior in a suspension bridge model*, Int.J.Bif.& Chaos **14** (3), no prelo.
- [Freitas et al. 03] M.S.T. Freitas, R.L. Viana, C. Grebogi (2003), *Erosion of the safe basin for the transversal oscillations of a suspension bridge*, Chaos, Solitons & Fractals **18** (4), 829-841, no prelo.
- [Frey e Simiu 95] M. Frey, E. Simiu (1995), *Noise-induced transitions to chaos*, in "Spatio-Temporal Patterns in Nonequilibrium Complex Systems - NATO Advanced Research Workshop", edited by P. E. Cladis and P. Palffy-Muhoray (Addinsson-Wesley, Reading, Massachussets).
- [Grebogi et al. 82] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1982), *Chaotic attractors in crisis*, Phys.Rev.Lett. **48** (22), 1507-1510.
- [Grebogi et al. 83] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1983), *Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos*, Phys. D **7**, 181-200.
- [Grebogi et al. 85] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke (1985), *Super persistent chaotic transients*, Ergod. Th. & Dyn. Sys. **5**, 341-372.
- [Grebogi et al. 86] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1986), *Metamorphoses of basin boundaries in nonlinear dynamical systems*, Phys. Lett. **56** (10), 1011-1014.
- [Grebogi et al. 87a] C. Grebogi, E. Kostelich, E. Ott, J.A. Yorke (1987), *Multi-dimensioned intertwined basin boundaries: basin structure of the kicked double rotor*, Phys. D **25**, 347-360.

- [Grebogi *et al.* 87b] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1987), *Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics*, Science **238**, 632-638.
- [Grebogi *et al.* 87d] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, H.E. Nusse (1987), *Fractal basin boundaries with unique dimension*, Ann. N. Y. Accad. Sci. **497**, 117-126.
- [Grebogi *et al.* 88a] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1988), *Unstable periodic orbits and the dimension of multifractal chaotic attractors*, Phys.Rev. A **37**, (5), 1711-1724.
- [Grebogi *et al.* 88b] C. Grebogi, H.E. Nusse, E. Ott, J.A. Yorke (1988), *Basic sets: sets that determine the dimensions of basin boundaries*, em “Lecture Notes in Mathematics” **1342** (Dynamical Systems), ed. J.C. Alexander (Springer-Verlag, N.Y.), 220-250.
- [Grebogi e Lai 97] C. Grebogi, Y. Lai (1997), *Controlling chaotic dynamical systems*, Syst. & Control Lett. **31**, 307-312.
- [Guckenheimer e Holmes 83] J. Guckenheimer, P. Holmes (1983), *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*, 2^a ed. (Springer, N.Y.).
- [Halliday e Resnick 91] D. Halliday, R. Resnick (1991), *Fundamentos de Física* (L.T.C., R.J.).
- [Hindmarsh 83] A.C. Hindmarsh (1983), *Odepack, a systematized collection of o.d.e. solvers*, in “Scientific Computing”, ed. by R.S. Stepleman *et al.* (North-Holland, Amsterdam).
- [Jerrelind e Stensson 00] J. Jerrelind, A. Stensson (2000), *Nonlinear dynamics of parts in engineering systems*, Chaos, Solitons & Fractals **11**, 2413-2428.
- [Kim e Noah 91] Y.B. Kim, S.T. Noah (1991), *Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise-linear characteristics: a general approach*, Journal of Applied Mechanics **58**, 545-553.
- [Koughan 96] J. Koughan (1996), *The collapse of the Tacoma Narrows Bridge, evaluation of competing theories of its demise, and the effects of the disaster of succeeding bridge designs*, Undergraduate Engineering Review, august 1, 1996.
- [Kraut *et al.* 99] S. Kraut, U. Feudel, C. Grebogi (1999), *Preference of attractors in noisy multistable systems*, Phys.Rev. E **59** (5), 5253-5260.
- [Lazer e McKenna 90] A.C. Lazer, P.J. McKenna (1990), *Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis*, SIAM Rev. **58** (4), 537-578.
- [Lichtenberg 97] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman (1997), *Regular and chaotic dynamics*, 2^a ed. (Springer, N.Y.).

- [Luo e Xie 02] G. W. Luo, J. H. Xie (2002), *Hopf bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system in two strong resonance cases*, Int.J. Non-Linear Mechanics **37**, 19-34.
- [Macau e Grebogi 99] E.E.N. Macau, C. Grebogi (1999), *Driving trajectories in complex systems*, Phys.Rev. E **59** (9), 4062-4070.
- [McKenna e Walter 90] P.J. McKenna, W. Walter (1990), *Travelling waves in suspension bridges*, SIAM J. Appl. Math. **50**, 703-715.
- [Marcos *et al.* 03] S.H.-C. Marcos, S.R. Lopes, R.L. Viana (2003) *Boundary crisis, fractal basin boundaries, and electric power collapses*, Chaos, Solitons & Fractals **15**, 417-424, no prelo.
- [Matsumoto *et al.* 85] T. Matsumoto, L.O. Chua, M. Komuro (1985), *The double scroll*, IEEE Trans. Circuits Syst. **32**, 797-818.
- [McDonald *et al.* 85a] S.W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1985), *Fractal basin boundaries*, Phys. D **17**, 125-153.
- [McDonald *et al.* 85b] S.W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1985), *Structure and crisis of fractal basin boundaries*, Phys.Lett., **107A** (2), 51-54.
- [Moon e Li 85] F.C. Moon, G.X. Li (1985), *Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motions in a two-well potencial*, Phys.Rev.Lett. **55**, 1439-1442.
- [Morgenthal 00] G. Morgenthal (2000), *Comparison of Numerical Methods for Bridge-Deck Aerodynamics*, MPhil thesis, University of Cambridge.
- [Müller 95] P.C. Müller (1995), *Calculation of Lyapunov exponents for dynamical systems with discontinuities*, Chaos, Solitons & Fractals **5** (9), 1671-1681.
- [Nusse *et al.* 94] H.E. Nusse, E. Ott, J.A. Yorke (1994), *Border-collision bifurcations: an explanation for observed bifurcation phenomena*, Phys.Rev. E **49** (2), 1073-1076.
- [Nusse *et al.* 95] H.E. Nusse, E. Ott, J.A. Yorke (1995), *Saddle-node bifurcations on fractal basin boundaries*, Phys.Rev.Lett. **75**, (13) 2482-2485.
- [Nusse e Yorke 96a] H.E. Nusse, J.A. Yorke (1996), *Wada basin boundaries and basin cells*, Phys. D **90**, 242-261.
- [Nusse e Yorke 96b] H.E. Nusse, J.A. Yorke (1996), *Basins of attraction*, Science **271**, 1376-1380.
- [Nusse e Yorke 97] H.E. Nusse, J.A. Yorke (1997), *Dynamics: Numerical Explorations*, 2^a ed.
- [Park *et al.* 89] B. Park, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1989), *Scaling of fractal basin boundaries near intermittency transitions to chaos*, Phys.Rev. A **40** (3), 1576-1581.

- [Park *et al.* 92] B. Park, C. Grebogi, Y. Lai (1992), *Abrupt dimension changes at basin boundary metamorphoses*, Int.J. Bif. & Chaos **2** (2), 533-541.
- [Pascal 95] J.P. Pascal (1995), *Oscillations and chaotic behaviour of unstable railway wagons over large distances*, Chaos, Solitons & Fractals **5** (9), 1725-1753.
- [Pentek *et al.* 95] A. Pentek, Z. Toroczkai, T. Tel, C. Grebogi, J.A. Yorke, *Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: signatures of chaotic saddles*, Phys.Rev. E **51**, 4076-4088.
- [Popp e Stelter 90] K. Popp, P. Stelter (1990), *Stick-slip vibrations and chaos*, Phil. Trans. R. Soc. Lon. A **332**, 89-105.
- [Romeiras *et al.* 92] F.J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott, W.P. Dayawansa (1992), *Controlling chaotic dynamical systems*, Phys. D **58**, 165-192.
- [Santee e Gonçalves 99] D.M. Santee, P.B. Gonçalves (1999), *Unpredictability in certain nonlinear systems*, in “Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences, vol.2: Vibrations with Measurements and Control”, ed. J.M. Balthazar, P.B. Gonçalves, J. Clayssen.
- [Sartorelli *et al.* 94] J.C. Sartorelli, W.M. Golçalves, R.D. Pinto (1994), *Crisis and intermittency in a leaky-faucet experiment*, Phys.Rev. E **49**, 3963-3975.
- [Senjanovic e Fan 95] I. Senjanovic, Y. Fan (1995), *Numerical simulation of a ship capsizing in irregular waves*, Chaos, Solitons & Fractals **5**, 727-737.
- [Schuster 95] H.G. Schuster (1995), *Deterministic Chaos*, 3^a ed. aum. (VCH, Weinheim).
- [Shames 82] I.H. Shames (1982), *Mechanics of Fluids*, 2^a ed. (Mc Graw Hill, N.Y.).
- [Shaw e Holmes 83] S.W. Shaw, P.J. Holmes (1983), *A periodically forced piecewise linear oscillator*, J. Sound Vibrat. **90**, 129-155.
- [Shinbrot *et al.* 93] T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke (1993), *Using small perturbations to control chaos*, Nature **363**, 411-417.
- [Soliman e Thompson 92] M.S. Soliman, J.M.T. Thompson (1992), *Global dynamics underlying sharp basin erosion in nonlinear driven oscillators*, Phys.Rev. A **45**, 3425-3431.
- [Souza e Caldas 01] S.L.T. de Souza, I.L. Caldas (2001), *Basins of attraction and transient chaos in a gear-rattling model*, Journal of Vibration and Control **7**, 849-862.
- [Strogatz 94] S. H. Strogatz (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos - with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, (Perseus Books, Reading, Massachusetts).
- [Thomson 78] W.T. Thomson (1978), *Theory of Vibrations with Applications* (Prentice Hall, New Jersey, U.S.A.).

- [Thompson *et al.* 83] J.M.T. Thompson, A.R. Bokaian, R. Ghaffari (1983), *Subharmonic resonances and chaotic motions of a bilinear oscillator*, IMA Journal of Applied Mathematics **31**, 207-234.
- [Thompson e Ghaffari 83] J.M.T. Thompson, R. Ghaffari (1983), *Chaotic dynamics of an impact oscillator*, Phys.Rev. A **27** (3), 1741-1743.
- [Thompson *et al.* 90] J.M.T. Thompson, R.C.T. Rainey, M.S. Soliman (1990), *Ship stability criteria based on chaotic transients from incursive fractals*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **332**, 149-167.
- [Timoshenko 77] S.P. Timoshenko (1977), *Resistência dos Materiais* (Livros Técnicos e Científicos, São Paulo).
- [Wiercigroch e Sin 98] M. Wiercigroch, V.W.T. Sin (1998), *Measurement of chaotic vibration in a symmetrically piecewise linear oscillator*, Chaos, Solitons & Fractals **9** (1/2), 209-220.
- [Xiaofeng e Lai 00] G. Xiaofeng, C.H. Lai (2000), *On the synchronization of different chaotic oscillators*, Chaos, Solitons & Fractals **11**, 1231-1235.
- [Whiston 87b] G.S. Whiston (1987), *Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator*, Journal of Sound and Vibration **118**, 395-429.
- [Wiggins 97] S. Wiggins (1997), *Introduction to applied nonlinear dynamics and chaos* (Springer, N.Y.).
- [Zavodney *et al.* 90] L.D. Zavodney, A.H. Nayfeh, N.E. Sanchez (1990), *Bifurcations and chaos in parametrically excited single-degree-of-freedom systems*, Nonlinear Dynamics **1**, 1-21.